OSMANIA UNIVERSITY

علمِ مثلث مستوی

سلسلۂ نصابات علمیہ جامعہ عثمانیہ

علم مثلث مستوی

تصنیف

اِی۔ ڈبلیو۔ ہابسن۔ ایس سی ڈی ایل۔ ایل۔ ڈی ایف۔ آر۔ ایس

ترجمہ

محمد نذیرالدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن سررشتۂ تالیف و ترجمہ جامعۂ عثمانیہ سرکارِ عالی

سنہ ۱۳۵۵ھ م سنہ ۱۳۴۵ف م سنہ ۱۹۳۶ء

دارالطبع جامعۂ عثمانیہ سرکارِ عالی حیدرآباد دکن

فہرست مضامین

علم مثلث مستوی

پہلا باب

زاوئی مقداروں کی پیمائش

دوسرا باب

پانچواں باب

تحت ضعفی زاویوں کے دائری تفاعل

دفعات	مضمون	صفحہ

چھٹا باب
مختلف مسئلے

ساتواں باب
ضعفی زاویوں کے تفاعلوں کو پھیلانا

آٹھواں باب

ایک زاوئے کے دائری تفاعل اور دائری ناپ کے درمیان رشتے

نواں باب

مثلثی جدولیں

دسواں باب

مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان رشتے

گیارہواں باب

مثلثوں کا حل

بارھواں باب

مثلثوں اور ذوار بعۃ الاضلاعوں کے خواص

تیرھواں باب

پندرھواں باب

قوت نمائی تفاعل۔ لوکارتم

علم مثلث مستوی

پہلا باب

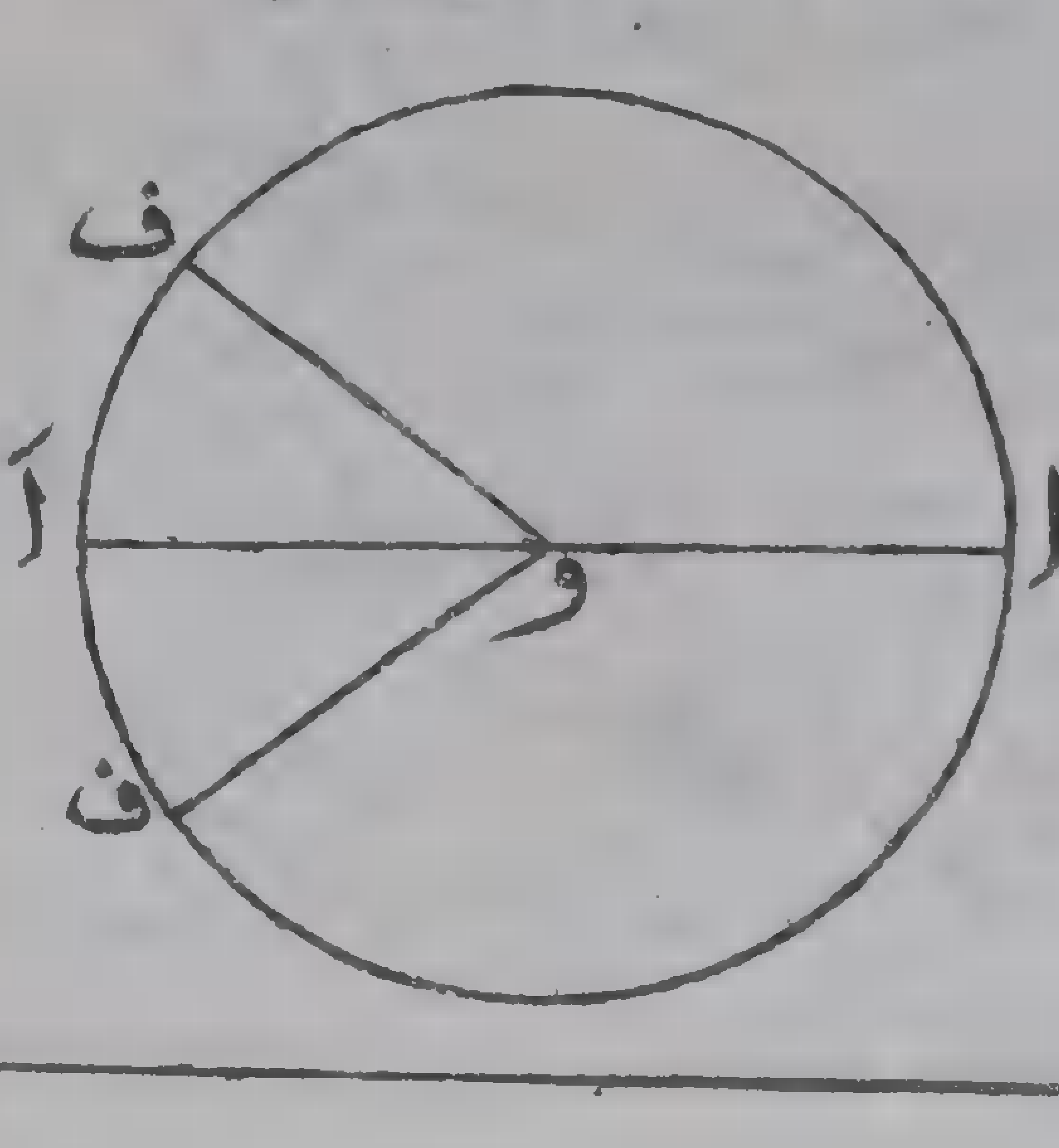
زاوئی مقداروں کی پیمایش

۱ — علم مثلث مُستوی کا اولین مقصد، مُستوی مثلثوں کو حل کرنیکا طریقہ دریافت کرنا ہے۔ مُستوی مثلث میں تین ضلع اور تین زاویے ہوتے ہیں اور اگر ان چھ اجزاء میں سے کسی تین کی مقداریں دیجائیں اور ان دئیے ہوئے اجزا میں سے کم از کم ایک ضلع ہو تو بعض شرطوں کے تحت باقی اجزاء کی مقداروں کی تعیین کرنا ممکن ہے، اِس کو مثلث کا حل کرنا کہتے ہیں۔ ہم دیکھینگے کہ علم مثلث مُستوی کے اس اولین مقصد کو حاصل کرنے میں زاوئی مقدار کے بعض تفاعلوں کو داخل کرنا ضروری ہوگا، یہ تفاعل دائری تفاعل کے نام سے موسوم کئے جاتے ہیں۔ اِس طرح وسیع مفہوم میں علم مثلث مستوی میں اِن دائری تفاعلوں کے خواص کی تحقیق اور تحلیلی اور ہندسی تحقیقاتوں میں اِن خواص کے اطلاقات بھی شامل ہیں جو مثلثوں کے حل سے تعلق نہیں رکھتے۔

کسی مقدار کے زاویہ کی تکوین

۲۔ اقلیدسی ہندسہ میں جن زاویوں پر بحث ہوتی ہے وہ سب کے سب
دو قائمہ زاویوں سے کم ہوتے ہیں، لیکن علم مثلث مستوی کے
مقاصد کے لئے زاویٔ مقدار کے تخیل کی توسیع کرنا ضروری ہے تاکہ
تمام مثبت اور منفی مقداروں کے زاویے شامل ہو جائیں۔

فرض کرو کہ و ا ایک ثابت خط مستقیم ہے اور ایک خط مستقیم
و ف جو ابتدا میں و ا پر منطبق ہوتا ہے نقطہ و کے گرد مخالف سمت
ساعت گھومتا ہے، تب جیسے وہ گھومتا ہے زاویہ ا و ف کی
تکوین کرتا ہے اور جب و ف محل و اَ پر پہنچتا ہے تو وہ دو قائمہ
زاویوں کے مساوی ایک زاویہ کی تکوین کر چکتا ہے اور پھر اگر وہ اسی
سمت میں گھومنا جاری رکھے تو وہ پھر آ کے و ا پر منطبق ہوتا ہے،
اب وہ چار قائمہ زاویوں میں سے گھوم چکا ہوتا ہے؛ پھر ہم فرض کر سکتے (2)
ہیں کہ و ف اسی سمت میں گھومنا جاری رکھتا ہے اور و کے
گرد متعدد مکمل چکر پورے کرتا ہے؛ ہر دفعہ جب وہ ایک مکمل گردش
کر لیتا ہے تو وہ چار قائمہ زاویے مرتسم کرتا ہے، اور اگر وہ کسی محل و ف
میں رک جائے تو وہ ایک ایسے زاویہ کی تکوین کر چکا ہو گا جو ف کے محل کے



مطابق کسی مطلق مقدار سے تعبیر ہو سکتا ہے اب ہم یہ قرارداد اختیار کرینگے کہ زاویہ مرتسمہ مثبت ہے جبکہ و ف مخالف سمت ساعت گھومے اور منفی ہے جبکہ و ف اسکی مخالف سمت میں یعنی سمت ساعت کے موافق گھومے۔ یہ قرارداد بالکل اختیاری ہے، اگر ہم چاہتے تو موافق سمت ساعت کو مثبت زاویے کے لئے لے سکتے تھے۔

اب ہماری قرارداد کی بموجب جب، و ف، مخالف سمت ساعت ایک مکمل گردش کرلیتا ہے تو وہ چار مثبت قائمہ زاویوں میں سے گھوم جاتا ہے، اور جب وہ موافق سمت ساعت ایک مکمل گردش کرلیتا ہے تو وہ چار منفی قائمہ زاویوں میں سے گھوم جاتا ہے۔

کسی مقدار کے زاویہ کی تکوین مثال ذیل سے واضح ہو سکتی ہے:- اس زاویہ پر غور کرو جو گھڑی کی بڑی سوئی سے تکوین پاتا ہے۔ ہر گھنٹہ میں یہ سوئی چار قائمہ زاویوں میں سے گھوم جاتی ہے اور جتنی مرتبہ گھوم چکتی ہے اس کا کوئی نشان نہیں چھوڑتی؛ لیکن یہ کام چھوٹی سوئی سے انجام پاتا ہے جو ایک گھنٹہ میں چار قائمہ زاویوں کا صرف بارہواں حصہ گھومتی ہے اور اس طرح بارہ گھنٹے سے کم کسی وقت میں وہ زاویہ ناپ سکتے ہیں جس میں سے بڑی سوئی گھوم چکی ہے۔ اب اس غرض کے لئے کہ بڑی سوئی سے تکوین یافتہ زاوئے مثبت ہوں اور اس کا ابتدائی محل اوپر کی شکل کے محل کے مطابق ہو سکے ہمیں یہ فرض کرنا پڑے گا کہ سوئیاں اس سمت کے مخالف گھومتی ہیں جس میں کہ وہ فی الواقعی گھوم رہی ہیں اور بارہ بجے کی بجائے تین بجے ایک دوسرے پر منطبق ہوتی ہیں۔

(3) ۳- فرض کرو کہ گھومنے والے خط کا آخری محل (بموجب شکل) و ف ہے۔ وہ زاویہ جو اس نے محل و ا سے محل و ف تک گھومنے میں مرتسم کیا ہے بے شمار مثبت اور منفی زاویوں میں سے ایک ہو سکتا ہے بلحاظ ان مکمل گردشوں کی تعداد اور سمت کے جو گھومنے والے خط نے کئے ہیں۔ ایسے کسی دو زاویوں میں چار قائمہ زاویوں کے مثبت یا منفی ضعف کا فرق ہوگا۔ ہم ان تمام زاویوں کو جو خطوط و ا، و ف سے محدود ہوتے ہیں ہم اختتامی زاوئے کہیں گے اور انکو (و ا، و ف)

سے تعبیر کریں گے، زاویوں (د ا، د ف) میں سے مقداراً چھوٹے سے چھوٹا زاویہ اقلیدسی زاویہ ا و ف ہے، اور باقی سب زاویٔے زاویٔے ا و ف کی جبری قیمت میں چار قائمہ زاویوں کے مثبت یا منفی ضعف جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

زاویوں کی عددی پیمائش

۴- یہ بتا دینے کے بعد کہ کسی مثبت یا منفی مقدار کے زاویہ سے کیا مراد ہے دوسرا کام زاویوں کی پیمائش سے متعلق ہے اور انکی عددی پیمائش کے لئے ایک نظام کا مقرر کرنا ضروری ہے۔ اس مقصد کے لئے ہمیں ایک اکائی زاویہ کا فیصلہ کر لینا چاہیئے جو مستقل مقدار کا اختیاری طور پر منتخب کردہ کوئی زاویہ ہو سکتا ہے، تب باقی سب زاویوں کی پیمائش اُن نسبتوں سے ہو سکتی ہے جو ان کو اس اکائی زاویہ کے ساتھ ہوں۔ ظاہر ہے کہ زاویہ قائمہ فطری اکائی ہے جو لیجا سکتی ہے لیکن چونکہ معمولی مقدار کے زاویٔے اس صورت میں ایک سے چھوٹی کسروں سے تعبیر ہونگے اس لئے اس سے چھوٹے زاویہ کو اکائی مقرر کرنا زیادہ سہولت بخش ہے عام طور پر جو اکائی مستعمل ہے وہ درجہ ہے جو زاویہ قائمہ کا نوّدواں حصہ ہے۔ پھر درجہ کے کسرات سے بچنے کے لئے درجہ کو ساٹھ حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جن کو دقیقہ کہتے ہیں اور نیز دقیقہ کو ساٹھ حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جنکو ثانیہ کہتے ہیں۔ ایک ثانیہ سے کمتر زاویوں کو ثانیہ کے اعشاریہ کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔ ثالثہ جو ثانیہ کا ساٹھواں حصہ ہو سکتا ہے استعمال نہیں کیا جاتا۔ د درجوں کے زاویہ کو دْ سے تعبیر کیا جاتا ہے، م دقیقوں کے زاویہ کو مَ سے اور ن ثانیوں کے زاویہ کو نً سے۔ اس طرح زاویہ دْ مَ نً سے مراد وہ زاویہ ہے جس میں د درجے + م دقیقے + ن ثانیٔے شامل ہیں اور وہ زاویہ قائمہ کے

$$\frac{د}{۹۰} + \frac{م}{۹۰ \times ۶۰} + \frac{ن}{۹۰ \times ۶۰ \times ۶۰}$$ کے مساوی ہے۔

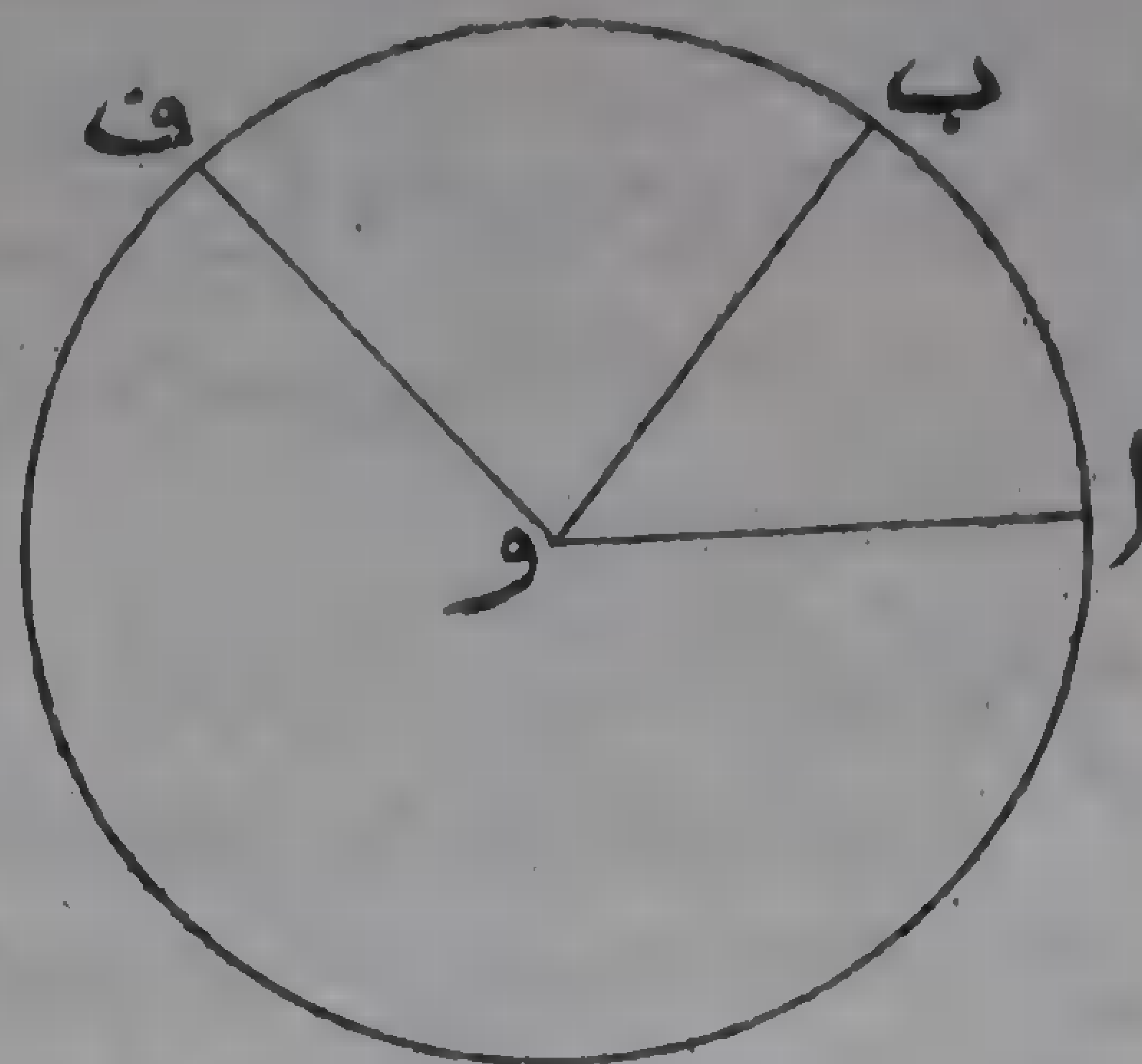
زاویوں کی عددی پیمائش کا یہ نظام ستینی نظام کہلاتا ہے۔ مثلاً
زاویہ ۲۳° ۱۴′ ۵۶٫۴″، زاویہ قائمہ کا $\frac{۲۳}{۹۰}+\frac{۱۴}{۶۰\times۹۰}+\frac{۵۶٫۴}{۶۰\times۶۰\times۹۰}$
ہے۔

یہ تجویز پیش تھی کہ زاویوں کی پیمائش کا اعشاری نظام (4)
استعمال کیا جائے۔ اس نظام میں زاویہ قائمہ سو مرتبوں (Grades) میں
تقسیم کیا جاتا ہے، مرتبہ سو دقیقوں میں اور دقیقہ سو ثانیوں میں، تب گ مرتبوں
م دقیقوں اور ن ثانیوں کے زاویہ کو گ^گ م` ن`` لکھا جاتا ہے۔ مثلاً زاویہ
۲۳^گ ۱۴` ۹۷٫۲۴`` زاویہ قائمہ کے ۲۳۱۴۹۷٫۲۴ کے مساوی ہے۔ لیکن یہ
نظام کبھی بھی استعمال نہیں ہوا، خصوصاً اس وجہ سے کہ وقت کو طول بلد کے
مرتبوں میں تبدیل کرنا ذرا تکلیف دہ ہے تا وقتیکہ دن کی تقسیم موجودہ صورت کے
علاوہ کوئی اور نہ کیجائے۔ اگر مرتبوں کا نظام اختیار کیا جاتا تو دن ۲۴ گھنٹوں
کی بجائے چالیس گھنٹوں میں تقسیم کیا جا سکتا تھا اور گھنٹہ ایک سو دقیقوں میں
اور یہ امر وقت پیمائش میں تغیر کرنے کو مستلزم ہوتا۔ وقت کے اس نظام کا
ایک گھنٹہ طول بلد کے $\frac{۵}{۱۰}$ مرتبوں کے فرق کے متناظر ہے، جو کسری ہونے کی
وجہ سے تکلیف دہ ہے۔

یہ ایک دلچسپ واقعہ ہے کہ بابلیوں (Babylonians) نے بھی چار قائمہ زاویوں کی
۳۶۰ حصوں میں تقسیم کو استعمال کیا تھا۔ انھوں نے چار قائمہ کو اس تعداد میں کیوں
تقسیم کیا اس بارے میں بہت قیاس آرائیاں کی گئی ہیں۔

زاویوں کی دائری پیمائش

۵۔ تمام خالص عملی مقاصد میں زاویوں کی عددی پیمائش کا
ستینی نظام بالعموم استعمال کیا جاتا ہے لیکن نظری مقاصد
کے لئے زاویہ کی ایک مختلف اکائی لینا زیادہ سہولت بخش ہے کسی دائرہ
میں جس کا مرکز و ہے فرض کرو کہ ا ب ایک قوس ہے جس کا طول



دائرے کے نیم قطر کے مساوی ہے تو ہم ثابت کریں گے کہ زاویہ ا و ب کی مقدار مستقل ہے اور کسی خاص دائرہ پر منحصر نہیں ہے۔ اس زاویہ کو نیم قطری یا دائری ناپ کی اکائی کہا جائے گا اور کسی دوسرے زاویہ کی مقدار کو اُس نسبت سے بیان کیا جائے گا جو اس کو اکائی زاویہ کے ساتھ ہو اور یہ نسبت زاویہ کا دائری ناپ کہلائیگی۔

٦۔ اب یہ ثابت کرنے کے لئے کہ نیم قطری ایک مستقل زاویہ ہے ہم حسب ذیل دو مسئلے مان لیں گے :- (ه)

(ا) ایک ہی دائرہ میں مختلف قوسوں کے طول ایک دوسرے کے ساتھ وہی نسبت رکھتے ہیں جو ان کے محاذی مرکز پر بننے والے زاویوں میں ہوتی ہے۔

(ب) دائرے کے پورے محیط کا طول قطر کے ساتھ ایک ایسی نسبت رکھتا ہے جو سب دائروں کے لئے ایک ہی ہے۔

مسئلہ (ا) اقلیدس مقالہ ششم مسئلہ ۳۳ میں ہے اور مسئلہ (ب) کا ثبوت اس باب کے ختم پر دیا گیا ہے۔ (ا) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\frac{\text{قوس ا ب}}{\text{دائرہ کا محیط}} = \frac{\text{زاویہ ا و ب}}{\text{۴ قائمہ زاویے}}$$

چونکہ قوس ا ب دائرہ کے نیم قطر کے مساوی ہے ان نسبتوں میں سے پہلی نسبت مسئلہ (ب) کی رو سے تمام دائروں کے لئے ایک

ہی ہے، اس لئے زاویہ ا و ب مستقل مقدار کا ہے اور کسی خاص دائرہ پر منحصر نہیں ہے۔

۷۔ آگے چل کر یہ بتایا جائے گا کہ دائرہ کے محیط اور اس کے قطر میں جو نسبت ہوتی ہے وہ ایک غیر منطق عدد ہے، یعنی ہم صحیح اعداد م اور ن معلوم نہیں کر سکتے ایسے کہ $\frac{م}{ن}$ ٹھیک ٹھیک اس نسبت کے مساوی ہو۔ ہم کسی آئندہ باب میں وہ مختلف طریقے بیان کریں گے جو اس نسبت کی قیمت تقریبی طور پر محسوب کرنے میں استعمال ہوتے ہیں۔ یہ نسبت بالعموم π سے تعبیر کیجاتی ہے۔ فی الحال یہ کہنا کافی ہے کہ π صرف ایک غیر مختتم غیر متوالی اعشاریہ کی شکل میں حاصل کیا جاسکتا ہے اور اس کی قیمت اعشاریہ کے بیس مقامات تک یہ ہے

۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶

اکثر تقریبی قیمت ۳٫۱۴۱۵۹ کا استعمال کرنا کافی ہوگا۔ نسبتیں

$\frac{۲۲}{۷}$ = ۳٫۱۴۲۸۵۷ ، $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$ = ۳٫۱۴۱۵۹۲۹ بھی π کی تقریبی قیمتوں کے طور پر استعمال کیجاسکتی ہیں کیونکہ وہ علی الترتیب اعشاریہ کے دو اور [illegible] مقامات تک π کی صحیح قیمت کے مطابق ہیں۔

۸۔ ہم بتا چکے ہیں کہ نیم قطری کو چار قائمہ زاویوں کے ساتھ وہی نسبت ہے جو ایک دائرہ کے نصف قطر کو اس کے محیط کے ساتھ ہے،

پس نیم قطری $\frac{۲}{π}$ × ایک زاویہ قایمہ کے مساوی ہے، اب چونکہ زاویہ قائمہ ۹۰° کا ہوتا ہے اس لئے π کی تقریبی قیمت ۳٫۱۴۱۵۹۲۷ استعمال کرنے سے، ہمیں نیم قطری کی تقریبی قیمت درجوں میں (6) ۵۷٫۲۹۵۷۷۹۶° حاصل ہوتی ہے یعنی درجہ کے اعشاری حصہ کو دقیقوں اور ثانیوں میں بیان کرنے سے ۵۷° ۱۷′ ۴۴٫۸″ ۔

گلیشر (Glaisher) نے نیم قطری کی قیمت ثانیوں میں اعشاریہ

کے اہم مقامات تک صحیح محسوب کی ہے[1]۔ $\frac{1}{\pi}$ کی قیمت اعشاریہ کے ۱۴۱ مقامات تک حاصل کیجا چکی ہے[2]۔

۹۔ زاویہ قائمہ کا دائری ناپ $\frac{1}{2}\pi$ ہے، اور دو قائمہ زاویوں کا π، اور اب ہم درجوں میں دئے ہوئے کسی زاویہ کا دائری ناپ معلوم کر سکتے ہیں، اور اس کے برعکس نیم قطری میں دئے ہوئے کسی زاویہ کو درجوں میں بیان کر سکتے ہیں؛ اگر ایک زاویہ میں د درجے ہوں اور اس کا دائری ناپ ط ہو تو $\frac{ط}{\pi} = \frac{د}{۱۸۰}$ کیونکہ ان میں سے ہر ایک نسبت اُس نسبت کو ظاہر کرتی ہے جو دئے ہوئے زاویہ کو دو قائموں کے ساتھ ہے؛ پس د درجوں کے زاویہ کا دائری ناپ $\frac{\pi}{۱۸۰}$ د ہے اور دائری ناپ ط کے زاویہ میں درجوں کی تعداد $\frac{۱۸۰}{\pi}$ ط ہے، اگر زاویہ درجوں دقیقوں اور ثانیوں میں دیا جائے جیسے $د^\circ\ م'\ ن''$ تو اس کا دائری ناپ یہ ہے

$$(د + م \backslash ۶۰ + ن \backslash ۳۶۰۰)\ \pi \backslash ۱۸۰$$

۱° کا دائری ناپ ....۰٫۰۱۷۴۵۳۲۹ ہے، $۱'$ کا ....۰٫۰۰۰۲۹۰۸۸۸۲ اور $۱''$ کا ....۰٫۰۰۰۰۰۴۸۴۸۱۳۷

۱۰۔ قوس ا ف کے محاذی دائرہ کے مرکز پر کے زاویہ ا و ف کا دائری ناپ

$$\frac{\text{قوس ا ف}}{\text{دائرہ کا نصف قطر}}$$

[1] دیکھو کوارٹرلی جرنل جلد چہارم مضمون On the calculation of the value of the theoritical unit angle to a great number of places.

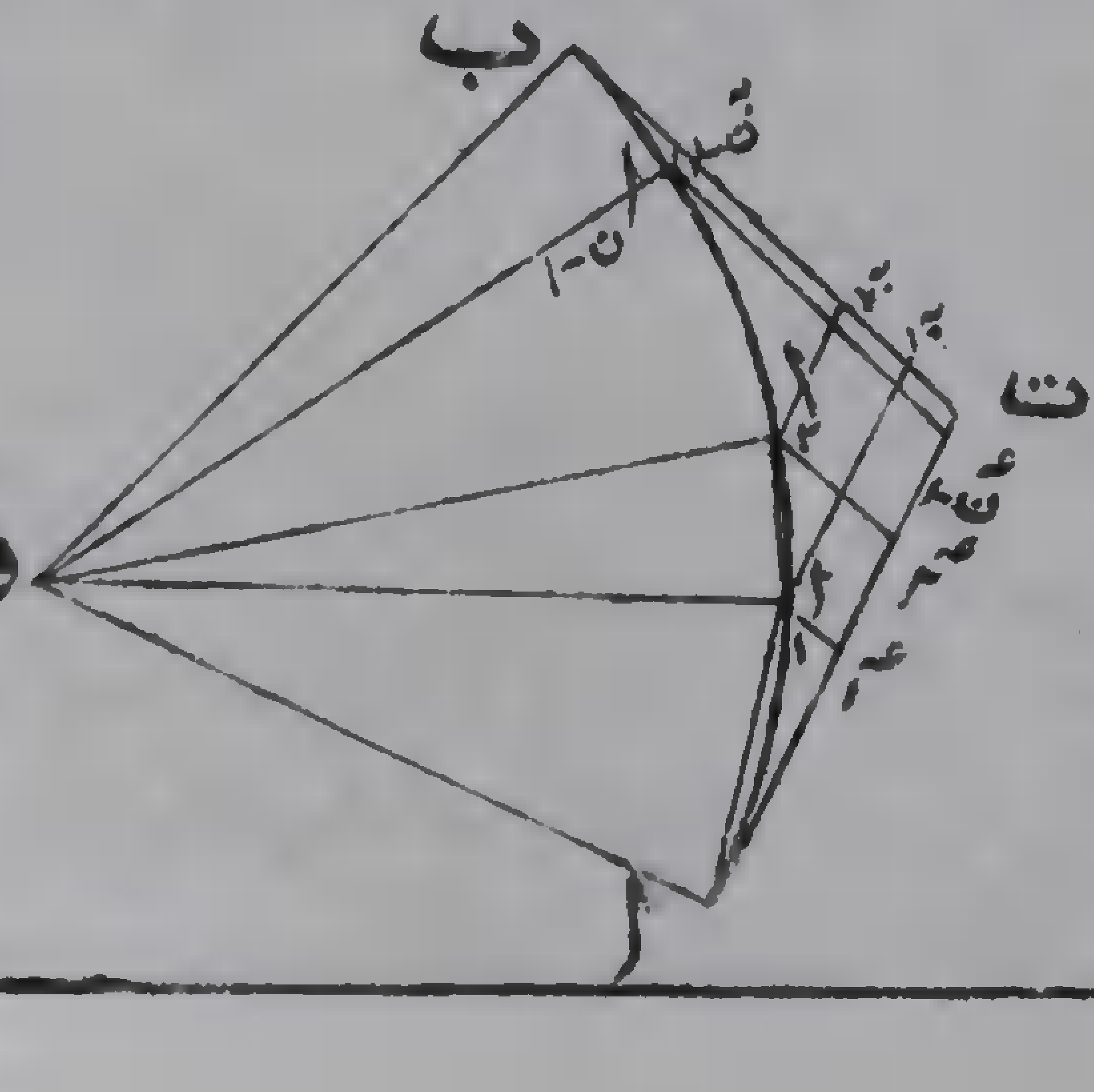
[2] دیکھو Granert's Archiv جلد اول ۱۸۴۱ء۔

کے مساوی ہے، کیونکہ یہ نسبت (قوس اف ÷ قوس اب) یعنی (زاویہ اوف ÷ زاویہ اوب) کے مساوی ہے۔

قوس اف پورے محیط سے بڑی ہو سکتی ہے اور اس کو مثبت یا منفی طور پر ناپا جاسکتا ہے اُس سمت کی بموجب جس میں وہ ابتدائی نقطہ ا سے ناپی گئی ہے؛ اس طرح کسی مقدار کے زاویہ کا دائری ناپ وہ نسبت ہے جو اس قوس کے طول کو جس کے محاذی زاویہ بنتا ہے دائرے کے نیم قطر کے ساتھ ہے۔ نیم قطر ر والے دائرہ کی قوس کا طول رطہ ہوتا ہے جبکہ طہ اس زاویہ کا دائری ناپ ہو جو اس قوس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر بنتا ہے۔ اس طرح دائرہ کا پورا محیط ۲ π ر ہے۔

(7) دائری قوس کا طول

۱۱۔ اوپر یہ مان لیا گیا ہے کہ دائری قوس کا طول وجود رکھتا ہے اور قوس کی عددی پیمائش ہو سکتی ہے، اس امر کی اب تحقیق کیجائے گی۔ طول کا اصلی تخیل ایک خطی وقفہ کا تخیل ہے یعنی خط مستقیم کا ایک محدود حصہ، اور منحنی کی قوس کے طول (مثلاً دائری قوس کا طول) کے تخیل کو اس سے ماخوذ سمجھنا چاہیئے۔ ہم تسلیم کریں گے کہ خط مستقیم کے ایک دے ہوئے محدود حصہ کا طول وجود رکھتا ہے اور اسے ایک محدود منطق یا غیر منطق عدد سے تعبیر کیا جاسکتا ہے جو طول کی کسی مقررہ اکائی پر منحصر ہوتا ہے۔ اب دائری قوس اب کے طول کو معلوم کرنے کے لئے ہم حسب ذیل



عمل کرتے ہیں:— فرض کرو کہ قوس ا ب متعدد نقطوں ا$_1$، ا$_2$، ...، ا$_{ن-1}$
پر تقسیم کی گئی ہے، اندرونی نابند کثیر ضلعی ا ا$_1$ ا$_2$ ... ا$_{ن-1}$ ب پر غور کرو۔
اس کثیر ضلعی کے ضلعوں کے طولوں کے مجموعہ ا ا$_1$ + ا$_1$ ا$_2$ + ...
+ ا$_{ن-1}$ ب، کی ایک محدود قیمت ف$_1$ ہے۔ پھر قوس ا ب کے اندر
ایک نیا کثیر ضلعی ا اَ$_1$ اَ$_2$ ... اَ$_{نَ-1}$ ب بناؤ جس میں نَ > ن اور اس
کثیر ضلعی کا بڑے سے بڑا ضلع کثیر ضلعی ا ا$_1$ ا$_2$ ... ب کے بڑے سے
بڑے ضلع سے چھوٹا ہو، فرض کرو کہ اس نئے نابند کثیر ضلعی کے ضلعوں
کا مجموعہ ف$_2$ ہے۔ اسی طرح قوس ا ب کی متواتر تقسیم در تقسیم جاری
رکھنے سے ہمیں اندرونی نابند کثیر ضلعیوں کا ایک تواتر ملتا ہے جنکے
ضلعوں کے طولوں کے مجموعے اعداد ف$_1$، ف$_2$، ف$_3$، ... ف$_ن$ ... کے
ایک تواتر سے تعبیر ہو سکتے ہیں اور یہ تواتر غیر محدود طور پر جاری رکھا
جا سکتا ہے۔ اگر عدد ف$_ن$ کی ایک معین انتہا ل ہو جو قوس ا ب کی
متواتر تقسیم در تقسیم کے طریقہ پر منحصر نہ ہو اور صرف اِس شرط (8)
کے تحت ہو کہ ف$_ن$ کے جواب میں نابند کثیر ضلعی کا بڑے سے بڑا ضلع
لاانتہا چھوٹا ہو جائے جبکہ ن لاانتہا بڑا ہو تو یہ کہا جاتا ہے کہ قوس
ا ب کا طول ل ہے۔ یہ دکھانے کے لئے کہ دائری قوس طول
رکھتی ہے یہ دکھانا ضروری ہے کہ یہ انتہا ل موجود ہے، اور اب ہم
اسے ثابت کریں گے۔ تعریف سے یہ واضح ہے کہ اگر ا ب ج ایک
قوس ہو اور ا ب، ب ج کے طول معین ہوں تو ا ج کا طول بھی
معین ہوگا، اور ا ب ج کا طول قوسوں ا ب، ب ج کے طولوں
کا مجموعہ ہوگا۔ اس لئے یہ ثابت کرنا کافی ہوگا کہ کوئی قوس جو نصف دائرہ
سے کم ہے معین طول رکھتی ہے۔ اول ہم کثیر الاضلاعوں کے اس
مخصوص تواتر پر غور کرتے ہیں جس میں ہر کثیر ضلعی کے راس تواتر کے

باقی سب کثیر ضلعوں کے راس بھی ہیں۔ اِن نابند کثیر الاضلاعوں کے طولوں کو $ف_1$، $ف_2$، ... $ف_ن$، ... سے تعبیر کرکے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$ف_1 < ف_2 < ف_3 .... < ف_ن ...$$

کیونکہ مبادی علم ہندسہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ $ل_ر ل_{ر+1}$ طول میں $ل_ر$ اور $ل_{ر+1}$ کو ملانے والے ایک نابند کثیر ضلعی کے ضلعوں کے مجموعہ سے کم ہے نیز اعداد $ف_1$، $ف_2$، ... $ف_ن$ ... سب کے سب ایک مستقل عدد سے کم ہیں۔ کیونکہ فرض کرو کہ قوس اب کے سروں اَ ب پر مماس ت ا، ت ب ہیں، ب ت کے متوازی $ل_1 ع_1$، ... $ل_{ن-1} ع_{ن-1}$ کھینچو اور نیز ا ت کے متوازی $ل_1 ب_1$، $ل_2 ب_2$، ... $ل_{ن-1} ب_{ن-1}$ کھینچو۔

$$ا ل_1 < ا ع_1 + ل_1 ع_1 < ا ع_1 + ت ب_1$$

اور $$ل_1 ل_2 < ع_1 ع_2 + ب_1 ب_2 \quad \text{وغیرہ}$$

پس $$ا ل_1 + ل_1 ل_2 + ... + ل_{ن-1} ب < ا ت + ب ت$$

اسلئے $$ف_ن < ا ت + ب ت$$

اب انتہاؤں کے نظریہ کے ایک اساسی اصول کی بموجب، چونکہ عددوں $ف_1$، $ف_2$ ... $ف_ن$ ... کا تواتر ایسا ہے کہ ہر ایک اپنے بعد والے عدد سے کم ہے اور نیز ان میں سے سب عدد ایک مستقل عدد سے کم ہیں اِسلئے تواتر کی ایک انتہا ل ہے ایسی کہ اگر صہ ایک اختیاری مثبت عدد خواہ کتنا ہی چھوٹا ہو ن کی ایک خاص قیمت $ن_1$ ایسی دریافت ہوسکتی ہے کہ اس سے بڑی ن کی تمام قیمتوں کے لئے $ف_ن$ کا ل سے

فرق صہ سے چھوٹا ہو۔

اگر ا، ب کو ملانے والے کثیر ضلعی جن کے طول ف۱، ف۲، ... فن، .... ہیں خواہ کیسے ہی ہوں اور اگر وہ اس شرط کے ماتحت نہ ہوں کہ ہر ایک کے راس باقی دوسروں کے راس ہیں لیکن صرف اس شرط کے ماتحت ہوں کہ ن ویں کثیر ضلعی کا بڑے سے بڑا ضلع گھٹتا ہے جیسے ن بڑھتا ہے اور اس کی انتہا صفر ہے تو ہم اس صورت میں تواتر ف۱، ف۲، ... فن، ... کا مقابلہ متذکرہ خاص تواتر کے ساتھ کرتے ہیں جس کے متعلق یہ دکھایا جا چکا ہے کہ کثیر الاضلاعوں کے طولوں کی ایک معین انتہا ل موجود ہے۔ فرض کرو کہ اس خاص تواتر ف۱، ف۲ .... سے متعلق ایک خاص کثیر ضلعی ا ا۱ ا۲ ... ار-۱ ب ایسا ہے جس کا طول ل - صہ سے بڑا ہے۔

اب ایک صحیح عدد نَ معلوم کیا جا سکتا ہے ایسا کہ اگر ن ≥ نَ تو کثیر ضلعی ا عہ بہ جہ .... کہ .... ب میں جس کا طول فن ہے بڑے سے بڑا ضلع کثیر ضلعی ا ا۱ ا۲ ... ار-۱ ب کے چھوٹے سے چھوٹے ضلع سے کم ہو اور نیز صہ/۲ سے کم ہو۔ تب نقطوں عہ، بہ، جہ، ... میں سے بعض نقطے قوسوں ا ا۱، ا۱ ا۲ ... میں سے ہر ایک میں واقع ہیں۔ فرض کرو کہ ا ا۱ میں عہ، بہ، جہ واقع ہوتے ہیں، تب

ا عہ + عہ بہ + بہ جہ + جہ ا۱ > ا ا۱

یہ اور اس قسم کی نامساواتیں ا۱ ضہ + ضہ صہ + ... + ک ا۲ > ا۱ ا۲ وغیرہ استعمال کرنے سے اور چونکہ جہ ا۱، ا۱ ضہ، ....

سب کے سب $\frac{\text{صہ}}{\text{۲ر}}$ سے کم ہیں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف}_{\text{ن}} + \text{صہ} > \text{ا}\text{ا}_{۱} + \text{ا}_{۱}\text{ا}_{۲} + \dots + \text{ا}_{\text{ر}-۱}\text{ب} > \text{ل} - \text{صہ}،$$

اسلئے $\text{ف}_{\text{ن}} > \text{ل} - ۲\,\text{صہ}$، بشرطیکہ $\text{ن} \geqslant \bar{\text{ن}}$

پھر کثیر ضلعی $\text{ا}\,\text{اَ}_{۱}\,\text{اَ}_{۲} \dots \text{ب}$ پر جو اس تواتر کا ہے جن کے طول $\text{ف}_{۱}$، $\text{ف}_{۲}$ ... ہیں غور کرو جبکہ یہ کثیر ضلعی اتنے آگے کا ہے کہ اس کا بڑے سے بڑا ضلع اع یہ جہ ... ک ب کے چھوٹے سے چھوٹے ضلع سے کم ہے اور نیز $\frac{\text{صہ}}{\text{۲س}}$ سے کم ہے جہاں اس آخری کثیر ضلعی میں ضلعوں کی تعداد س ہے۔ پہلے کی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ف}_{\text{ن}} < \text{صہ} + \text{ا}\text{اَ}_{۱} + \text{اَ}_{۱}\text{اَ}_{۲} + \dots < \text{ل} + \text{صہ}$$

لیکن یہ بتایا جا چکا ہے کہ اگر $\text{ن} \geqslant \bar{\text{ن}}$ تو $\text{ف}_{\text{ن}}$، ل + صہ اور ل - ۲ صہ کے درمیان واقع ہوتا ہے اور اس لئے $\text{ف}_{\text{ن}}$ اور ل میں ۲ صہ سے کم فرق ہے۔ اب چونکہ صہ کا انتخاب اختیاری ہے اور اس کی ہر قیمت کے جواب میں ایک صحیح عدد $\bar{\text{ن}}$ حاصل ہوتا ہے اسلئے یہ ثابت ہوا کہ ن کو لا انتہا بڑھانے پر $\text{ف}_{\text{ن}}$ کی وہی انتہا ل ملتی ہے جو کثیر الاضلاعوں کے اس خاص تواتر کی ہے جس پر ہم نے پہلے غور کیا ہے۔

پس یہ ثابت ہوا کہ دائری قوس کا طول ایک معین عدد سے ناپا جا سکتا ہے جبکہ طول کی کوئی اکائی مان لی جائے۔

پورے دائرہ کا محیط ھ بھی ان اندرونی بند کثیر الاضلاعوں کے گھیروں کے تواتر کی انتہا معلوم کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے جبکہ بڑے سے بڑا ضلع لا انتہا چھوٹا ہو جائے جیسے تواتر آگے بڑھے۔

اب اقلیدس مقالہ ششم مسئلہ ۳۳ کے مطابق یہ ثابت کیا جائیگا

کہ ایک ہی دائرے کی مختلف قوسوں کے طولوں میں وہی نسبت ہوتی
ہے جو مرکز پر ان قوسوں کے محاذی بننے والے زاویوں میں ہے۔
یہ ثابت کرنے کے لئے کہ دائروں کے محیط ایسے بدلتے ہیں
جیسے ان کے قطر فرض کرو کہ دو دائرے ہیں جن کے قطر ق اور قَ
ہیں اگر دو متشابہ کثیر ضلعی ان دائروں کے اندر بنائے جائیں تو متشابہ
مستقیم الاضلاع اشکال کے خواص کی بناء پر یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ان کثیر
الاضلاعوں کے گھیرے ایک دوسرے کے ساتھ وہی نسبت رکھتے ہیں
جو ق اور قَ میں ہے۔ اب دائروں کے محیط م اور مَ کو ان انتہاؤں (10)
کے برابر سمجھا جا سکتا ہے جو کثیر الاضلاعوں کے دو تواتروں کے گھیروں
ف~ن~، فَ~ن~ کی ہیں جبکہ ب~ن~ کے متناظر کثیر ضلعی، ن کی ہر قیمت کے
لئے، اُس کثیر ضلعی کے متشابہ ہو جو فَ~ن~ کے جواب میں ہے۔ اب
چونکہ ف~ن~ : فَ~ن~ = ق : قَ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ف~ن~
کی انتہا کو فَ~ن~ کی انتہا کے ساتھ جو نسبت ہے وہ نسبت ق : قَ کے
مساوی ہے؛ اور اس لئے

م : مَ = ق : قَ

دائرہ کے قطاع کا رقبہ

۱۳— فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز و ہے۔ اس کی کسی قوس
ا ب سے جو قطاع محدود ہوتا ہے اس کے رقبہ کی تعریف اس طرح کی جاتی
ہے کہ یہ مثلثوں و ا ا~۱~، و ا~۱~ ا~۲~ … و ا~ن-۱~ ب کے رقبوں کے مجموعے
کی انتہا ہے جبکہ کثیر ضلعی ا ا~۱~ ا~۲~ … ا~ن-۱~ ب کے ضلعوں کی تعداد لاانتہا
بڑی ہو اور اس کا بڑے سے بڑا ضلع لاانتہا چھوٹا ہو جیسا کہ دفعہ (۱۱)
میں بتایا جا چکا ہے۔ یہ ثابت کرنا لازم ہوگا کہ یہ انتہا موجود ہے اور ایک

معین عدد کے برابر ہے۔

فرض کرو کہ و سے ضلعوں اا_1، $\text{ا}_1\text{ا}_2$، ... $\text{ا}_{\text{ن}-1}\text{ب}$ پر عمود کھینچے گئے ہیں اور ان کے طول ق_1، ق_2، ... $\text{ق}_\text{ن}$ ہیں، تب مثلثوں کے رقبوں کا مجموعہ ہے

$$\frac{1}{2}(\text{ق}_1 \times \text{اا}_1 + \text{ق}_2 \times \text{ا}_1\text{ا}_2 + \cdots + \text{ق}_\text{ن} \times \text{ا}_{\text{ن}-1}\text{ب})$$

اور یہ مجموعہ، $\frac{1}{2}$ قَ × فن اور $\frac{1}{2}$ قً × فن کے درمیان واقع ہوتا ہے جہاں قَ اور قً عددوں ق_1، ق_2، ... $\text{ق}_\text{ن}$ میں سے علی الترتیب بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے عدد ہیں اور فن کثیر ضلعی کے ضلعوں کا مجموعہ ہے۔ فن کی انتہا موجود ہے کیونکہ یہ قوس اب کا طول ہے۔ نیز عددوں قَ، قً کی ایک ہی انتہا ہے اور وہ دائرہ کا نصف قطر ہے، کیونکہ ان میں اور نصف قطر میں کثیر ضلعی کے بڑے سے بڑے ضلع کے نصف سے کم کا فرق ہے۔ پس قطاع کا رقبہ ایک محدود عدد ہے جو دائرہ کے نصف قطر ر اور قوس اب کے طول رط کے نصف حاصل ضرب کے مساوی ہے، جہاں ط، زاویہ اوب کا دائری ناپ ہے۔ اس طرح رقبہ اوب = $\frac{1}{2}$ ر^{2}ط۔ پورا دائرہ ایک قطاع خیال کیا جاسکتا ہے جس کو محدود کرنے والی قوس پورا محیط ہے، پس پورے دائرہ کا رقبہ π ر^2 ہے۔

باب اول پر مثالیں

۱۔ پیمایش کی اکائی کیا ہونی چاہیے کہ اس کے لحاظ سے کسی زاویہ کا عددی ناپ اُس فرق کے مساوی ہو سکے جو درجوں اور دائری ناپ میں بیان کرنے پر اس کے عددی ناپوں کے درمیان ہوتا ہے۔

۲— اگر ایک مثلث کے زاویوں کے ناپ، اکائیوں اُ، اَ، ...اُگ کے لحاظ سے ۲، ۱، ۳ کی نسبت میں ہوں تو زاویے معلوم کرو۔

۳— ن ضلعوں والے ایک منتظم کثیر ضلعی کے ایک زاویے میں درجوں کی تعداد معلوم کرو (11)

(۱) جبکہ وہ محدب ہو، (۲) جبکہ اس کا گھیرا اندرونی دائرہ کو م مرتبہ احاطہ کرے۔

۴— ایک مثلث کے دو زاویے ۲۵° ۳۵َ ۵۱ًً، ۴۱ُ ۲۲َ ۵۰ً ہیں تیسرا زاویہ معلوم کرو۔

۵— ایک دائرہ کا نصف قطر ...۴ میل ہے اس کی اُس قوس کا طول اعشاریہ کے پانچ مقامات تک معلوم کرو جس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر ۱° کا زاویہ بنتا ہے۔

٦— ایک زاویے کو مرتبوں اور درجوں میں ناپا گیا ہے اور معلوم ہوا کہ ان کا فرق $\frac{\text{زاویے کا دائری ناپ}}{\pi ۲}$ کے مساوی ہے۔ زاویہ معلوم کرو۔

۷— ایک مستوی چار ضلعی کے زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور سب سے بڑے زاویے اور سب سے چھوٹے زاویہ کا فرق ایک زاویہ قائمہ ہے۔ ہر زاویہ کو درجوں میں ناپو اور نیز دائری ناپ میں۔

۸— دو مثلثوں میں سے ہر ایک کے زاویے سلسلہ ہندسیہ میں ہیں، ایک مثلث کا چھوٹے سے چھوٹا زاویہ دوسرے مثلث کے چھوٹے سے چھوٹے زاویہ کا تین گنا ہے اور ان کے بڑے سے بڑے زاویوں کا مجموعہ ۲۴۰° ہے۔ زاویوں کا دائری ناپ معلوم کرو۔

۹— اگر ۸ فٹ قطر کے ایک دائرہ کی ۱۰ فٹ طول کی قوس ۴۳° ۱۴َ ۲۲ً کا زاویہ مرکز پر بنائے تو π کی قیمت اعشاریہ کے چار مقامات تک معلوم کرو۔

۱۰— دو منتظم شکلیں معلوم کرو ایسی کہ ایک کے ایک زاویے کے درجوں کی تعداد کو دوسرے کے ایک زاویے کے درجوں کی تعداد سے وہی

نسبت ہو جو ایک کے ضلعوں کی تعداد کو دوسرے کے ضلعوں کی تعداد سے ہے۔

۱۱۔ ا ب ج ایک مثلث ہے ایسا کہ جب اس کے ہر زاویہ کو یکے بعد دیگرے پیمائش کی اکائی قرار دیجاتی ہے اور دوسرے دو زاویوں کے مجموعہ کے ناپ معلوم کئے جاتے ہیں تو یہ ناپ سلسلہ حسابیہ میں ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث کے زاوئے سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ ان میں سے صرف ایک زاویہ، زاویہ قائمہ کے $\frac{2}{3}$ سے بڑا ہو سکتا ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ منتظم کثیر الاضلاعوں کے گیارہ اور صرف گیارہ زوج ایسے ہیں کہ ہر زوج میں ایک کثیر الاضلاع کے ایک زاویہ کے درجوں کی تعداد دوسرے کے ایک زاویہ میں مرتبوں کی تعداد کے مساوی ہے۔ نیز یہ ثابت کرو کہ صرف چار زوج ایسے ہیں جن میں یہ زاوئے صحیح عددوں سے بیان ہوتے ہیں۔

۱۳۔ سورج کا ظاہری زاوئی قطر نصف درجہ ہے۔ یہ دیکھا گیا کہ ایک سیارہ اسکی قرص پر سے ایک خط مستقیم میں جو قرص کے مرکز سے اس کے نصف قطر کے $\frac{3}{5}$ فاصلہ پر ہے سیدھا گذر جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ سیارہ کے راستہ کے اس محدود حصہ کا سورج پر جو ظل پڑتا ہے اس کے محاذی زمین پر $\frac{11}{450}$ کا زاویہ بنتا ہے۔

———(۰)———

دوسرا باب (12)

خطوں کی پیمائش ظل

۱۳۔ اگر ایک دئے ہوئے خط مستقیم پر جسے دونوں جانب لاانتہا طویل فرض کیا جا سکتا ہے ایک دیا ہوا طول کسی مفروضہ نقطہ سے ناپنا مطلوب ہو تو یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ کس سمت میں یہ دیا ہوا طول ناپا جائے۔ ابہام سے بچنے کے لئے ہم اس بات پر متفق ہوتے ہیں کہ خط مستقیم پر ایک سمت میں ناپے ہوئے طول مثبت عدد سے تعبیر ہونگے اور اس لئے اسکی مخالف سمت میں ناپے ہوئے طول منفی عدد سے۔ پس کسی ایسے خط میں مثبت سمت کا مقرر کرنا ضروری ہے۔ شکل میں فرض کرو کہ

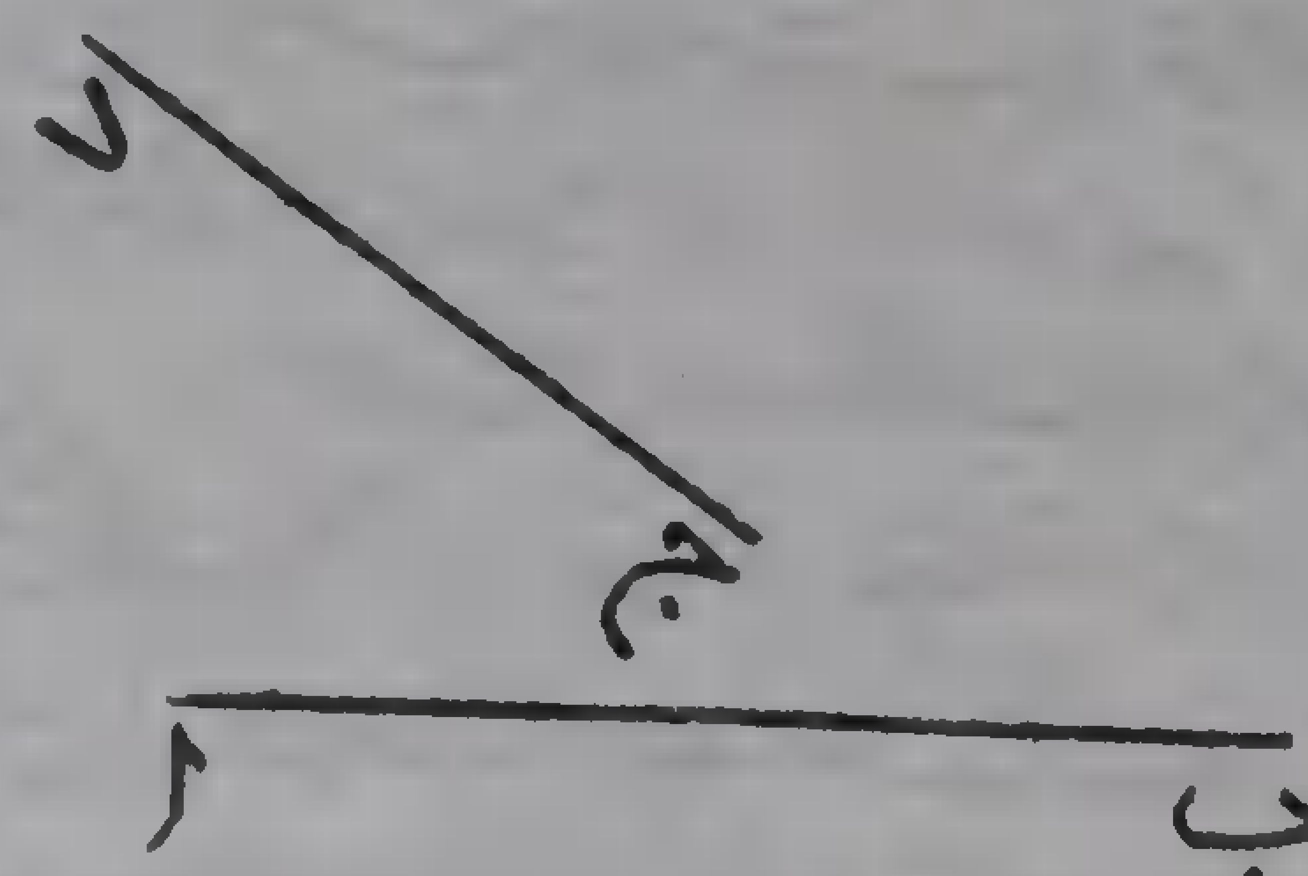


ہم اس بات پر متفق ہوتے ہیں کہ خطوط جو بائیں جانب سے سیدھی جانب ناپے جائیں مثبت ناپ رکھتے ہیں، پس طول ا ب کو مثبت شمار کیا جائیگا اور طول ب ا کو منفی یعنی ا ب = -ب ا۔

۱۴۔ اگر خط مستقیم پر کوئی تیسرا نقطہ ج ہو تو اب = اج + ج ب کیونکہ اگر ج (جیسا کہ شکل میں ہے) ب سے پرے واقع ہو تو خط ج ب منفی ہے اور اسلئے اس کی عددی قیمت، ا ج کی قیمت میں سے

تفریق ہو جاتی ہے۔ اگر متعدد خطوط مستقیم ہوں جو ایک ایسے نقطہ کی حرکت سے تکوین پائیں جو ا سے نکلتا ہے اور اپنی حرکت ب پر ختم کرتا ہے تو اِن خطوط مستقیم کے طولوں کا جبری مجموعہ، اب کے طول کے مساوی ہو گا۔

۱۵ — جب خطِ مستقیم و ف ابتدائی محل و ا سے گھوم کر دفعہ ۲ کی بموجب ایک زاویہ کی تکوین کرتا ہے تو ہم یہ فرض کر لیں گے کہ اثنائے گردش میں خطِ مستقیم و ف میں مثبت سمت نہیں بدلتی، (18)
اس طرح وہ زاویہ جو و ف کے کسی محل میں رُک جانے سے تکوین پاتا ہے حدود کی خطوں کی دو مثبت سمتوں کا درمیانی زاویہ ہوتا ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے



کہ اگر دو خطوط مستقیم کی مثبت سمتیں اب، ج د ہوں تو اب اور دج کا درمیانی زاویہ، اب اور ج د کے درمیانی زاویے سے بقدر دو قائمہ زاویوں کے چھوٹا یا بڑا ہو گا، کیونکہ کوئی خط محل اب سے گھومنے لگے تو اسکو د ج پر منطبق ہونے کے لئے جس زاویہ میں سے گھومنا ہو گا وہ اُس زاویہ سے بقدر ۱۸۰° کے بڑا یا چھوٹا ہو گا جس میں سے اس کو ج د پر منطبق ہونے کے لئے گھومنا پڑتا ہے۔

اگر ہم اُن تمام ہم اختتامی زاویوں پر غور کریں جو اب اور ج د، اور اب اور د ج سے علی الترتیب محدود ہیں تو (اب، ج د) = (اب، د ج) + ۱۸۰° جبکہ زاویے درجوں میں ناپے جائیں۔

۱۶ — جب کوئی خط مستقیم اپنے متوازی حرکت کرے تو ہم

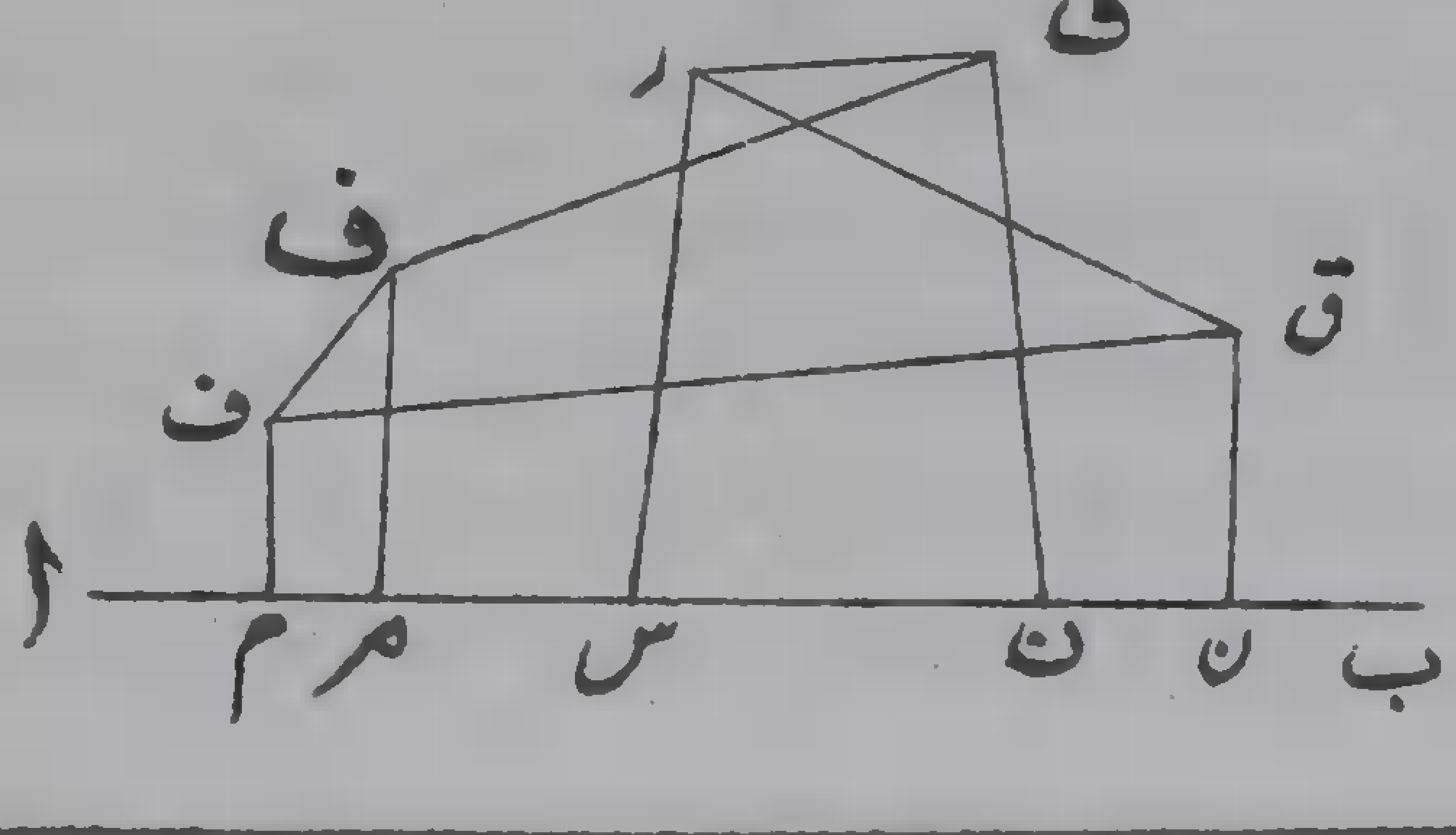
فرض کرینگے کہ اس کی مثبت سمت نہیں بدلتی، اس طرح اگر اب، ج د غیر قاطع خطوط مستقیم ہوں تو ان کا درمیانی زاویہ، اب اور اس خط مستقیم کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوگا جو ا سے ج د کے متوازی کھینچا گیا ہے۔ عام ہندسی مقاصد کے لئے اب اور ج د کا درمیانی زاویہ اب اور متوازی خط کے درمیان کا چھوٹے سے چھوٹا زاویہ بلالحاظ علامت لیا جاتا ہے۔

ظِل

۱۷۔ اگر کسی خط مستقیم ف ق کے سروں ف، ق سے کسی دوسرے خط مستقیم اب پر عمود ف م، ق ن کھینچے جائیں تو حصہ م ن کو اس کی مناسب علامت کے ساتھ، خط مستقیم اب پر خط مستقیم ف ق کا ظِل کہتے ہیں۔

یہ واضح رہے کہ ف ق اور اب کا ایک ہی مستوی میں ہونا ضروری نہیں ہے۔ ق ف کا ظل ن م ہے اور اس لئے اس کی علامت ف ق کے ظل کی علامت سے مختلف ہے۔

اگر نقطوں ف اور ق کو کسی شکستہ خط سے ملایا جائے جیسے ف فَ قَ رَ ق تو اب پر ف فَ، فَ قَ، قَ رَ، رَ ق کے ظِلوں کا مجموعہ اب پر ف ق کے ظِل کے مساوی ہوگا۔ کیونکہ ظِلوں کا مجموعہ ہے م مَ + مَ نَ + نَ سَ + سَ ن اور یہ دفعہ ۱۴ کی بموجب م ن　(14)



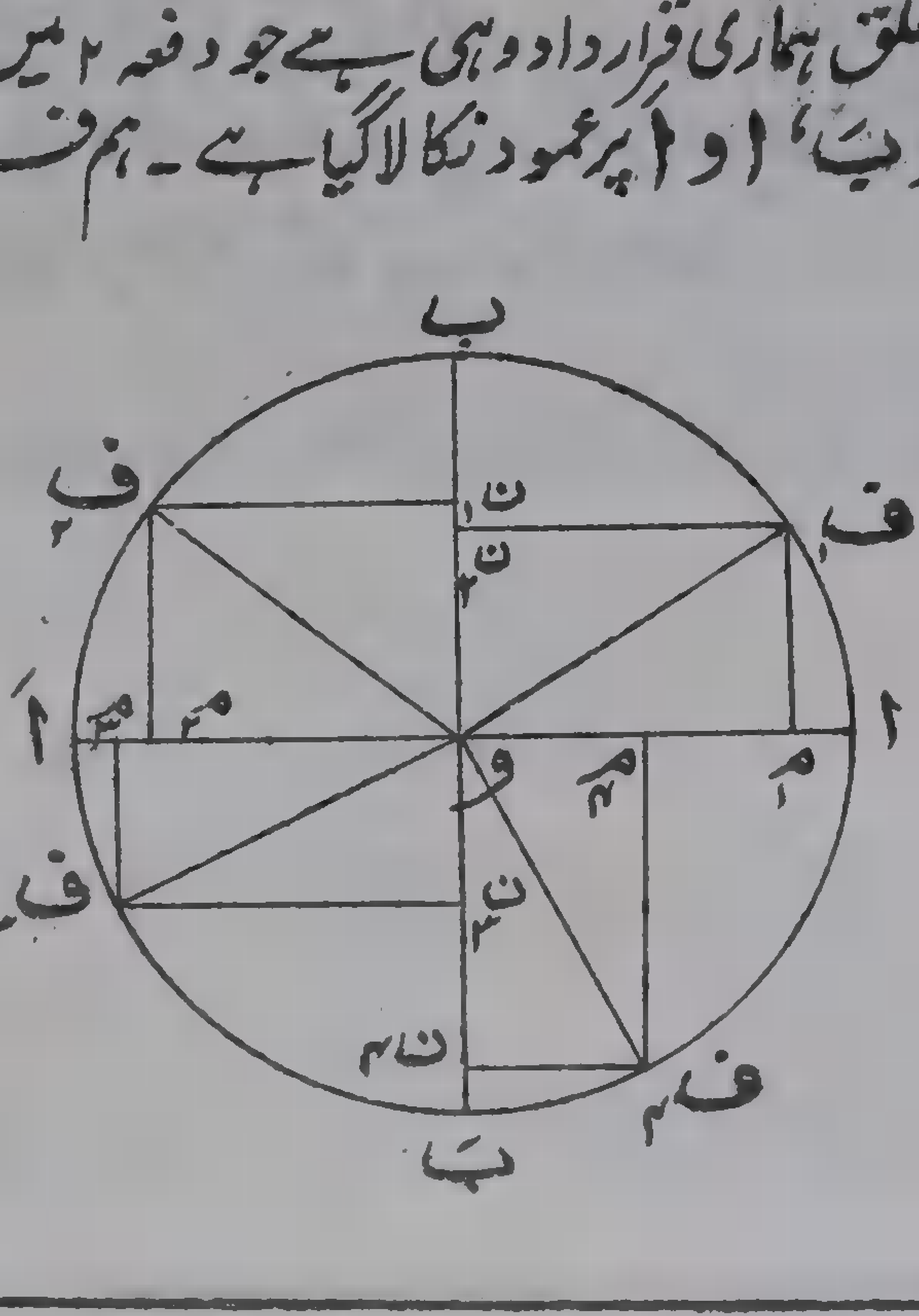
کے مساوی ہے اس طرح ہیں ظِلوں کی یہ بنیادی خاصیت حاصل ہوتی ہے:۔ کسی ثابت خط مستقیم پر، دو نقطوں ف و ق کو ملانے والے کسی شکستہ خط کے حصوں کے ظِلوں کا مجموعہ صرف ف اور ق کے محلوں پر منحصر ہوتا ہے اور ف، ق جس طریقہ سے ملائے گئے ہیں اُس پر منحصر نہیں ہوتا۔

اس مسئلہ کی ایک مخصوص صورت حسب ذیل ہے:۔ کسی خط مستقیم پر کسی بند کثیر الاضلاع کے ترتیب وار اضلاع کے ضلعوں کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔ شکل بالا میں اگر نقطے ف اور ق ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں تو ان کو ملانے والا شکستہ خط ایک بند کثیر الاضلاع ہو جاتا ہے، اور چونکہ ف ق کا ظِل صفر ہے کثیر الاضلاع کے ترتیب وار اضلاع کے ظِلوں کا مجموعہ صفر ہے۔ کثیر الاضلاع کا ایک مستوی میں ہونا ضروری نہیں ہے، اور نیز اس میں کئی متداخلہ زاوئے ہو سکتے ہیں۔

تیسرا باب (15)

دائری تفاعل۔ دائری تفاعلوں کی تعریفات

۱۸۔ زاویائی اور خطی مقداروں کی پیمایش کا طریقہ بتا دینے کے بعد اب ہم دائری تفاعلوں یا مثلثی نسبتوں کی تعریف کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ و ف، ابتدائی محل و ا سے نکلتا ہے اور اس کی گردش سے کسی مقدار ا کے زاویہ ا و ف کی تکوین، دفعہ ۲ کی بموجب، ہوتی ہے، زاویوں کی علامت سے متعلق ہماری قرارداد وہی ہے جو دفعہ ۲ میں بیان کی گئی ہے۔ فرض کرو کہ ب و بَ، ا و اَ پر عمود نکالا گیا ہے۔ ہم فرض کرتے



ہیں کہ آ و ا اور بَ و ب میں مثبت سمتیں علی الترتیب و سے ا
کی طرف اور و سے ب کی طرف ہیں - نیز گھومنے والے خط کی مثبت سمت (16)
سے متعلق ہماری قرارداد وہی ہے جو دفعہ ۱۵ میں بیان کی گئی ہے -

ابتدائی خط پر و ف کے ظِل کو جو نسبت طول
و ف سے ہے اُس کو زاویہ ا کی جیب التمام کہتے ہیں، اور
اِسے جم ا سے تعبیر کرتے ہیں -

خط مستقیم و ب پر، جو ابتدائی خط کے ساتھ +۹۰ درجہ کا زاویہ
بناتا ہے، و ف کے ظِل کو جو نسبت طول و ف سے ہے
اُس کو زاویہ ا کی جیب کہتے ہیں، اور اِسے جب ا سے تعبیر کرتے ہیں

و ب پر و ف کے ظِل کو جو نسبت و ا پر و ف کے
ظِل سے ہے اُس کو زاویہ ا کا مماس کہتے ہیں، اور اِسے
مس ا سے تعبیر کرتے ہیں -

و ا پر و ف کے ظِل کو جو نسبت و ب پر و ف
کے ظِل سے ہے اُس کو زاویہ ا کا مماس التمام کہتے ہیں، اور
اِسے مم ا سے تعبیر کرتے ہیں -

و ف کو جو نسبت و ا پر و ف کے ظِل سے ہے اُسکو
زاویہ ا کا قاطع کہتے ہیں، اور اِسے قط ا سے تعبیر کرتے ہیں -

وف کو جو نسبت وب پر وف کے ظل سے ہے اسکو زاویہ ا کا قاطع التمام کہتے ہیں، اور اسے قم ا سے تعبیر کرتے ہیں۔

پس

$$\text{جم ا} = \frac{\text{وم}}{\text{وف}}\text{، جب ا} = \frac{\text{ون}}{\text{وف}}\text{، مس ا} = \frac{\text{ون}}{\text{وم}}$$

$$\text{مم ا} = \frac{\text{وم}}{\text{ون}}\text{، قط ا} = \frac{\text{وف}}{\text{وم}}\text{، قم ا} = \frac{\text{وف}}{\text{ون}}$$

اگر نسبتوں کے تمام طول اپنی اپنی مناسب علامت کے ساتھ لئے جائیں تو ہمیں معلوم ہوگا کہ ان میں وف کی علامت ہمیشہ مثبت رہتی ہے لیکن وم اور ون میں سے ہر ایک کی علامت زاویہ ا کی مقدار کی بموجب مثبت یا منفی ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ مف، ون کے مساوی ہے، اور اس کی علامت بھی وہی ہے جو ون کی ہے، اس طرح

$$\text{جب ا} = \frac{\text{مف}}{\text{وف}}\text{، مس ا} = \frac{\text{مف}}{\text{وم}}\text{، مم ا} = \frac{\text{وم}}{\text{مف}}\text{، قم ا} = \frac{\text{وف}}{\text{مف}}$$

شکل میں زاویہ ا کی چار مقداریں ہیں اوف$_1$، اوف$_2$، اوف$_3$، اوف$_4$ جو ف کے چار مقامات ف$_1$، ف$_2$، ف$_3$، ف$_4$ کے متناظر ہیں۔

کسی مثبت یا منفی طول اب کا ظل ایک خط مستقیم ج د پر، اس طرح معلوم کیا جاتا ہے کہ اب کو اسکی ٹھیک علامت کے ساتھ لیکر اسکو اس زاویہ کی جیب التمام سے ضرب دیا جاتا ہے جو ان خطوں کی مثبت سمتوں کے درمیان ہے جن پر اب اور ج د واقع ہیں، اس طرح ظل اپنی ٹھیک علامت کے ساتھ معلوم ہوتا ہے۔

یہ بات مشاہدہ طلب ہے کہ شکل بالا میں وف کی علامت جیسے وہ ابتدائی محل وا سے گھومتا ہے ہمیشہ مثبت رہتی ہے اور وف جب وا' پر منطبق ہوتا ہے تو اس وقت اس کی علامت وا' کی علامت کے

(17) مخالف ہوتی ہے۔

دائری تفاعل

۱۹ — وہ چھ نسبتیں جن کی تعریف اوپر کی گئی ہے ہیں، اِن کو مثلثی نسبتیں یا مثلثی تفاعل بھی کہا جاتا ہے۔ ان میں سے ہر ایک صرف زاویہ ا کی مقدار پر منحصر ہے اور وف کے مطلق طول پر منحصر نہیں۔ یہ نتیجہ متشابہ مثلثوں کی اس خاصیت سے اخذ کیا گیا ہے کہ تمام متشابہ مثلثوں میں ضلعوں کی نسبتیں ایک ہی ہوتی ہیں، اس لئے جب وف کا کوئی اور طول لیا جاتا ہے تو ہمیں اسی زاویہ کے لئے حسب سابق وہی نسبتیں حاصل ہوتی ہیں۔ پس یہ چھ نسبتیں صرف زاوئی مقدار ا کے تفاعل ہیں، ہم ا کو ستینی نظام یا دائری ناپ سے پیمائش کر سکتے ہیں ہم بالعموم بڑے حروف ا، ب، ج ... اُن زاویوں کے لئے استعمال کرینگے جن کی پیمائش درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں ہوئی ہو اور حروف عہ، بہ، طہ، فہ ... ایسے زاویوں کے لئے جن کی پیمائش دائری ناپ میں ہوئی ہو، اس طرح جب ا سے اُس زاویہ کی جیب مراد ہو گی جس کا ناپ درجوں، دقیقوں، ثانیوں میں ا ہے اور جب عہ سے اُس زاویہ کی جیب جس کا دائری ناپ عہ ہے۔

ان چھ دائری تفاعلوں میں دو اور شامل کئے جا سکتے ہیں جو بعض اوقات استعمال کئے جاتے ہیں، ایک سہم الجیب ہے جسکو سہہ ا لکھتے ہیں، دوسرا سہم التمام ہے جس کو سہم ا لکھتے ہیں ان کی تعریف مساواتوں

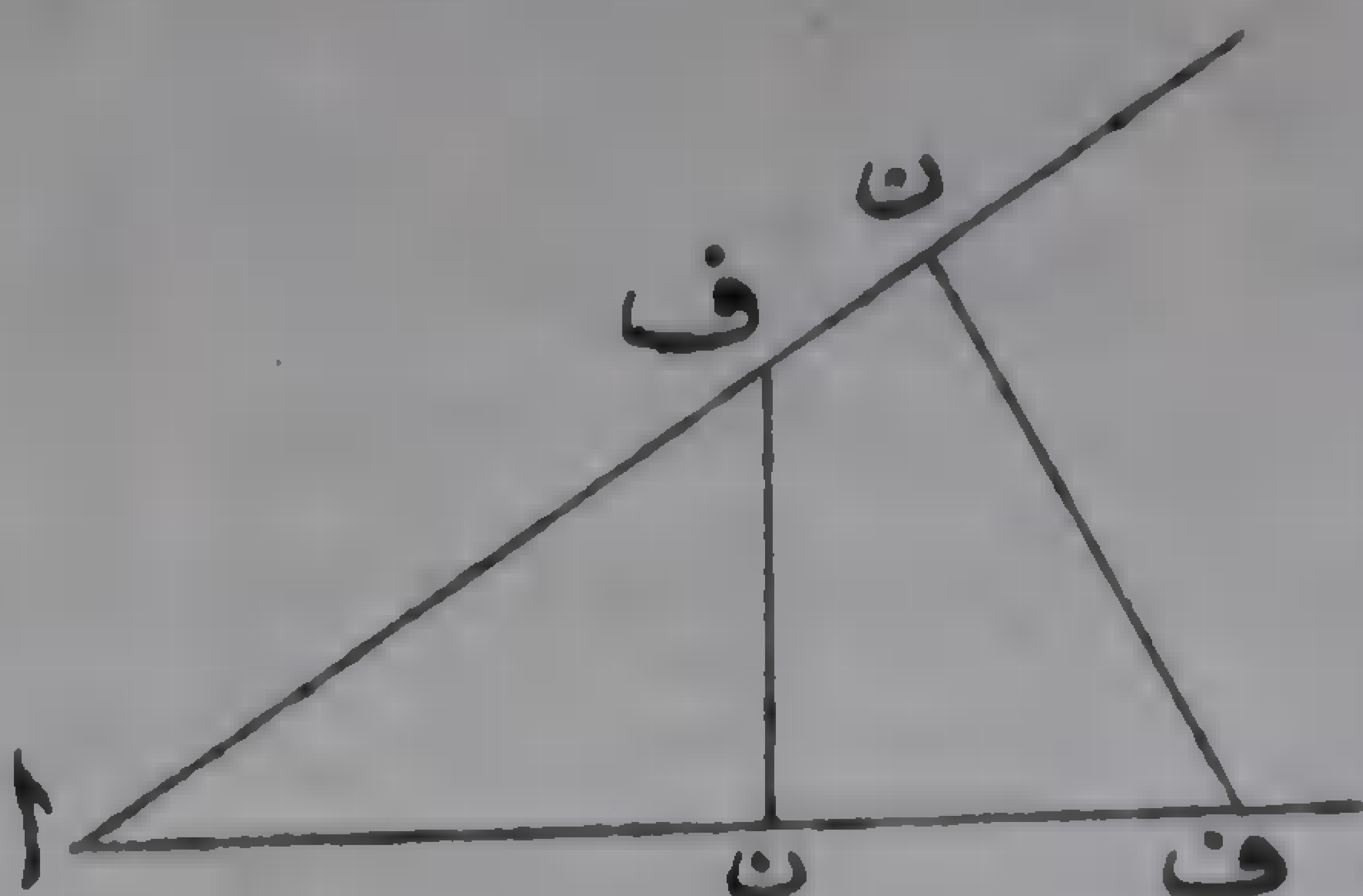
سہہ ا = ۱ - جم ا، سہم ا = ۱ - جب ا

سے کیجاتی ہے۔

نظری تحقیقاتوں میں سہم الجیب اور سہم التمام شاذ و نادر ہی استعمال ہوتی ہیں۔ لیکن جہاز رانی میں جو ضابطے استعمال ہوتے ہیں اِن میں سہم الجیب اکثر واقع ہوتی ہے۔

۲۰ — حادہ زاویے کی صورت میں دائری تفاعلوں کی تعریفیں

حسب ذیل شکل میں بیان کیجا سکتی ہیں :- فرض کرو کہ دیئے ہوئے زاوئے کو محدود کرنے والے خطوں میں سے کسی خط پر ف کوئی نقطہ ہے ،



ف سے دوسرے خط پر ف ن عمود کھینچو تو مثلث قائم الزاویہ ف ا ن
حاصل ہوتا ہے جس کا زاویہ ف ا ن دیا ہوا زاویہ ا ہے۔ تب مثلثی نسبتوں (18)
کی حسب ذیل تعریف کی جاتی ہے:-

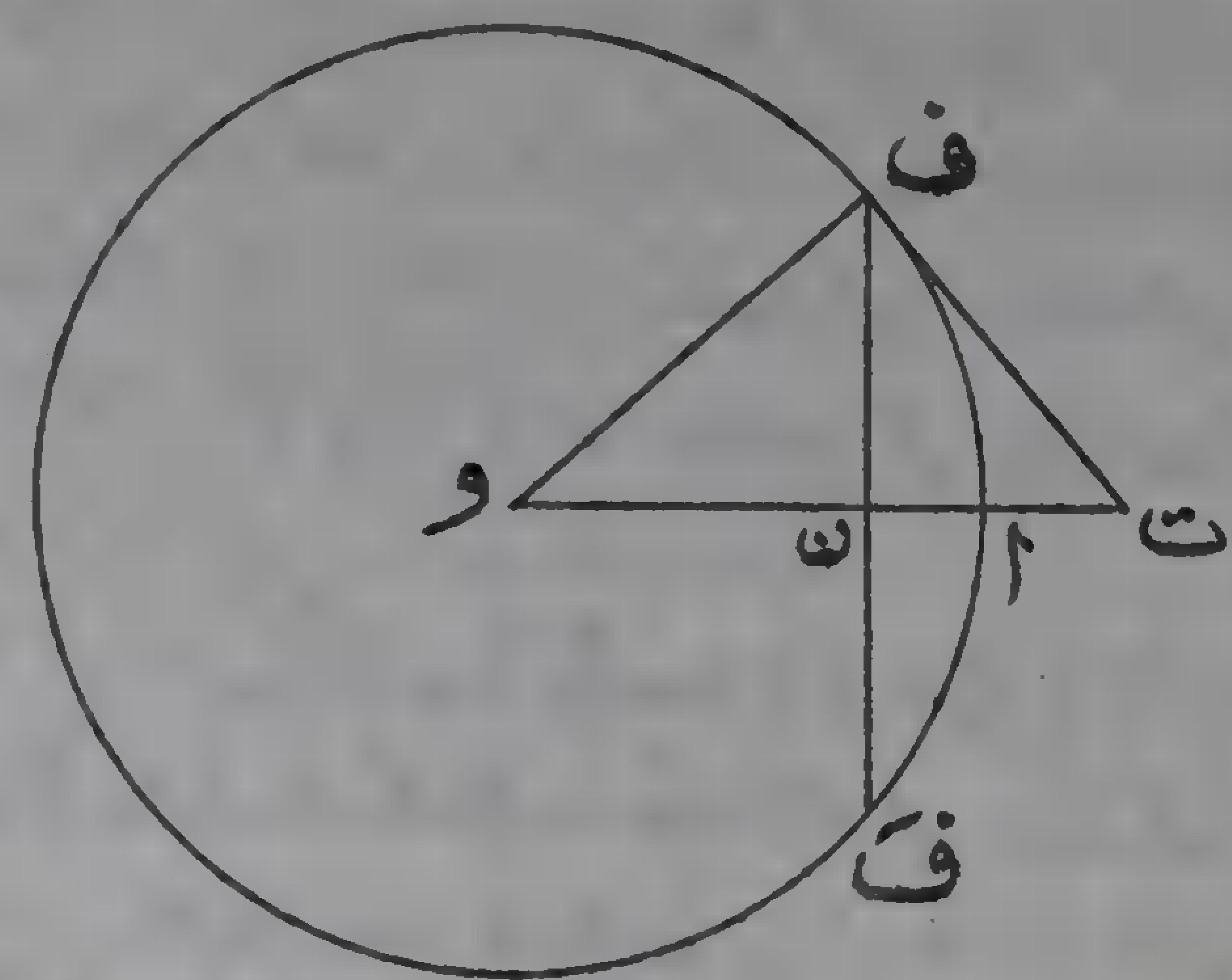
$$\text{جم ا} = \frac{\text{ا سے متصل ضلع}}{\text{وتر}} \quad ، \quad \text{جب ا} = \frac{\text{ا کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$$

$$\text{مس ا} = \frac{\text{ا کے مقابل کا ضلع}}{\text{ا سے متصل ضلع}} \quad ، \quad \text{مم ا} = \frac{\text{ا سے متصل ضلع}}{\text{ا کے مقابل کا ضلع}}$$

$$\text{قط ا} = \frac{\text{وتر}}{\text{ا سے متصل ضلع}} \quad ، \quad \text{قم ا} = \frac{\text{وتر}}{\text{ا کے مقابل کا ضلع}}$$

۲۱ — حال حال تک دائری تفاعلوں کی تعریف نسبتوں کے ذریعہ سے نہیں بلکہ طولوں کے ذریعہ سے کیجاتی تھی جو ایک خاص نصف قطر کے دائرہ کی قوسوں کے لحاظ سے لئے جاتے تھے۔ فرض کرو کہ دیئے ہوئے دائرہ کی ایک قوس ف ا ہے۔ ف ن ، و ا پر عمود کھینچو، اور فرض کرو کہ ف ا پر کا مماس

ف ت ہے، خط ف ن کو ف ا کی جیب کہا جاتا تھا، و ن کو اسکی جیب التمام، ف ت کو اس کا مماس، و ت کو اس کا قاطع، اور ا ن کو اسکی سہم الجیب۔ اس نظام میں جیب، جیب التمام، مماس، وغیرہ کی مقداریں نہ صرف زاویہ ف و ا



پر منحصر ہوتی تھیں بلکہ دائرہ کے نصف قطر پر بھی، جس کی تخصیص اس لئے ضروری تھی۔ ان تفاعلوں کی تعریف کا موجودہ طریقہ جس میں ان کو نسبتوں کے طور پر بیان کیا جاتا ہے یہ فائدہ رکھتا ہے کہ یہ تفاعل کسی دائرہ کے نصف قطر پر منحصر نہیں ہوتے اور اس لئے وہ صرف زاویہ کی مقدار کے تفاعل ہوتے ہیں۔ قوس کی جیب کو سب سے اول عرب کے عالم ریاضی البطونی نے استعمال کیا تھا (۸۵۰ء تا ۹۱۸ء)، یونان کے علماء ریاضی قوس ف ا کی جیب کے لئے ف ن کی بجائے دوہری قوس کے وتر ف فَ کو استعمال کیا کرتے تھے۔

(19) دائری تفاعلوں کے درمیان رشتے

۲۲ — دائری تفاعلوں کی تعریفات سے ہمیں حسب ذیل رشتے فوراً مل جاتے ہیں:

(۱) جم ا قط ا = ۱ ، (۲) جب ا قم ا = ۱

(۳) مس ا مم ا = ا، (۴) مس ا = جب ا : جم ا،
مم ا = جم ا : جب ا

رشتوں (۱)، (۲)، (۳) کو الفاظ میں یوں بیان کیا جاسکتا ہے کہ کسی زاوئے کا قاطع، قاطع التمام، اور مماس التمام علی الترتیب اس زاوے کی جیب التمام، جیب، اور مماس کے متکافی ہیں۔ رشتہ (۴) سے اس واقعہ کا اظہار ہوتا ہے کہ کسی زاویہ کا مماس وہ نسبت ہے جو اس کی جیب کو اس کی جیب التمام سے ہے اور رشتہ (۳) کی وجہ سے یہ کہنا ایسا ہی ہے کہ کسی زاویہ کا مماس التمام وہ نسبت ہے جو اس کی جیب التمام کو اس کی جیب سے ہے۔

۲۳۔ دفعہ ۱۸ کی شکل میں وف پر کا مربع، فیثاغورث کے مسئلہ کی رو سے، اس کے ظِل وم اور مف کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے، پس چونکہ نسبتیں $\frac{\text{وم}}{\text{وف}}$ اور $\frac{\text{مف}}{\text{وف}}$ علی الترتیب زاویہ ا کی جیب التمام اور جیب ہیں اسلئے (جم ا)^2 + (جب ا)^2 = ۱ جسکو بالعموم یوں لکھا جاتا ہے

جم^2 ا + جب^2 ا = ۱

اگر اس مساوات کی طرفین کو جم^2 ا پر تقسیم کیا جائے اور رشتوں (۱) اور (۴) کو یاد رکھا جائے تو ۱ + مس^2 ا = قط^2 ا، اسی طرح اگر مساوات کی طرفین کو جب^2 ا پر تقسیم کیا جائے اور رشتوں (۲) اور (۴) کو یاد رکھا جائے تو ۱ + مم^2 ا = قم^2 ا، اس طرح یہ تین مماثلات

جم^2 ا + جب^2 ا = ۱،
۱ + مس^2 ا = قط^2 ا، ...... (۵)
۱ + مم^2 ا = قط^2 ا

دائری تفاعلوں کے درمیان ایک ہی رشتہ کی مختلف شکلیں ہیں۔

۲۴ — یہ پانچ غیر تابع رشتے جو چھ دائری تفاعلوں کے درمیان اوپر حاصل ہوئے ہیں ان کی مدد سے ہم ان چھ دائری تفاعلوں میں سے کسی پانچ تفاعلوں کو چھٹے تفاعل کی رقوم میں بیان کرسکتے ہیں۔ طالب علم کو جدول ذیل کی صحت کی تصدیق خود کرلینی چاہیئے جس میں لا سے مراد وہ دائری تفاعل ہے جو اس کے ستون کے سرے پر لکھا ہے اور جملوں کی قیمت ہر افقی خط کے شروع میں درج ہے۔

(20)

	جب ا = لا	جم ا = لا	مس ا = لا	مم ا = لا	قط ا = لا	قم ا = لا
جب ا =	لا	$\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^2}$	$\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}^2}}$	$\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}^2}}$	$\frac{\sqrt{\text{لا}^2-\text{۱}}}{\text{لا}}$	$\frac{\text{۱}}{\text{لا}}$
جم ا =	$\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^2}$	لا	$\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}^2}}$	$\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}^2}}$	$\frac{\text{۱}}{\text{لا}}$	$\frac{\sqrt{\text{لا}^2-\text{۱}}}{\text{لا}}$
مس ا =	$\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^2}}$	$\frac{\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^2}}{\text{لا}}$	لا	$\frac{\text{۱}}{\text{لا}}$	$\sqrt{\text{لا}^2-\text{۱}}$	$\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{لا}^2-\text{۱}}}$
مم ا =	$\frac{\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^2}}{\text{لا}}$	$\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^2}}$	$\frac{\text{۱}}{\text{لا}}$	لا	$\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{لا}^2-\text{۱}}}$	$\sqrt{\text{لا}^2-\text{۱}}$
قط ا =	$\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^2}}$	$\frac{\text{۱}}{\text{لا}}$	$\sqrt{\text{۱}+\text{لا}^2}$	$\frac{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}^2}}{\text{لا}}$	لا	$\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2-\text{۱}}}$
قم ا =	$\frac{\text{۱}}{\text{لا}}$	$\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^2}}$	$\frac{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}^2}}{\text{لا}}$	$\sqrt{\text{۱}+\text{لا}^2}$	$\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2-\text{۱}}}$	لا

اس جدول میں جذر المربعوں کی علامتوں کے ابہام غیر متعین چھوڑ دئے گئے ہیں۔ اس جدول کی تصدیق یوں کی جاسکتی ہے :- فرض کرو کہ قط ا = لا دیا گیا ہے تو دفعہ ۲۲ کے رشتہ (۱) سے جم ا = $\frac{\text{۱}}{\text{لا}}$، رشتہ (۵) کی دوسری شکل سے مس ا = $\sqrt{\text{لا}^2-\text{۱}}$ اور پھر رشتہ (۳) سے مم ا = $\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{لا}^2-\text{۱}}}$

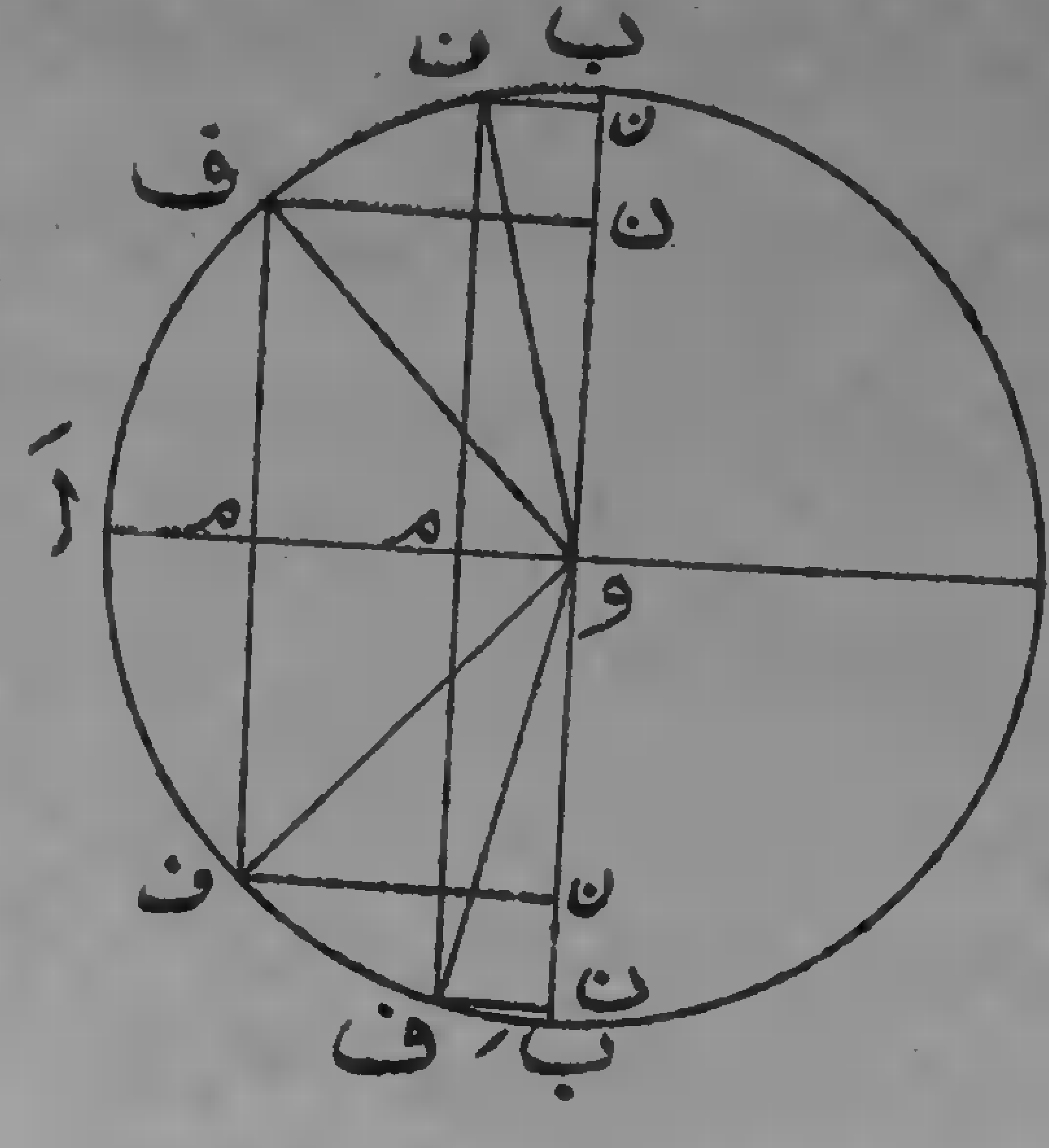
پھر رشتہ (۵) کی پہلی شکل سے جب ا = $\sqrt{1-\frac{1}{\text{لا}^2}} = \frac{\sqrt{\text{لا}^2-1}}{\text{لا}}$ ، پھر (۲) سے قم ا = $\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2-1}}$ ، اس طرح جدول کے پانچویں ستون کی صحت کی تصدیق ہو چکی۔

دائری تفاعلوں کی قیمتوں کے حدود

۲۵ — ایک خط مستقیم کا ظل دوسرے خط مستقیم پر مظلول خط سے طول میں بڑا نہیں ہو سکتا، پس کسی زاویہ کی جیب یا جیب التمام عدداً اکائی سے بڑی نہیں ہو سکتی، ان میں سے ہر ایک کی + ۱ اور − ۱ کے درمیان (بشمول ہر دو اعداد) کوئی قیمت ہو سکتی ہے، قاطع اور قاطع التمام چونکہ جیب التمام اور جیب کے متکافی ہیں اس لئے وہ حدود ± ۱ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتیں، اور اس لئے وہ عدداً اکائی سے بڑی یا اکائی کے مساوی ہوتی ہیں۔ مماس یا مماس التمام چونکہ دو ظلوں کی نسبت ہے جن میں سے ایک اپنی بڑی سے بڑی قیمت اختیار کرتا ہے جبکہ دوسرا معدوم ہوتا ہے اس لئے مماس یا مماس التمام کی ± ∞ کے درمیان کوئی قیمت ہو سکتی ہے۔ سہم الجیب صفر اور ۲ کے درمیان کوئی قیمت اختیار کر سکتا ہے۔

دائری تفاعلوں کے خواص (21)

۲۶ — اگر زاوئے ا و ف، ا و ف علی الترتیب ا اور − ا ہوں تو ہم دیکھتے ہیں کہ و ا پر و ف اور و ف کے ظل و م مساوی ہیں لیکن و ف پر ان کے ظل و ن اور و ن مقدار میں مساوی مگر علامت میں مختلف ہیں اس لئے



جم (- ا) = جم ا ، اور جب (- ا) = - جب ا (۶)

جن سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ،

مس (- ا) = - مس ا ، مم (- ا) = - مم ا

قط (- ا) = قط ا ، قم (- ا) = - قم (ا)

اگر کسی متغیر کا تفاعل اپنی مقدار نہ بدلے جبکہ متغیر کی علامت تبدیل کی جائے تو ایسے تفاعل کو جفت تفاعل کہتے ہیں، لیکن اگر تفاعل کی وہی عددی قیمت ہو جو پہلے تھی مگر مختلف علامت کے ساتھ تو تفاعل کو طاق تفاعل کہتے ہیں، مثلاً لا^{2} ، لا کا جفت تفاعل ہے اور لا^{3} لا کا طاق تفاعل ہے ، لیکن لا^{2} + لا^{3} نہ جفت ہے اور نہ طاق کیونکہ اسکی عددی قیمت بدلجاتی ہے جبکہ لا کی علامت تبدیل کیجاتی ہے۔

پس معلوم ہوا کہ کسی زاویہ کی جیب التمام اور قاطع جفت تفاعل ہیں اور جیب، مماس، مماس التمام، اور قاطع التمام طاق تفاعل ہیں

سہم الجیب جفت تفاعل ہے، لیکن سہم التمام نہ جفت ہے نہ طاق

۲۷ — کسی زاویے کے دائری تفاعلوں کی قیمتیں حدودی خط وف کے محل پر بلحاظ دوسرے حدودی خط و ا کے منحصر ہوتی ہیں، اس لئے تمام ہم اختتامی زاویوں (و ا، وف) کے دائری تفاعل وہی ہوتے ہیں جو زاویہ ا کے ہیں، یعنی بہ الفاظ دیگر تمام زاویوں ن × ۳۶۰° + ا کے دائری تفاعل وہی ہوتے ہیں جو ا کے ہیں جبکہ ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہو۔ اگر عہ اس زاویہ کا دائری ناپ ہو جس میں ا درجے ہیں تو دائری ناپ میں تمام زاویوں ۲ ن π + عہ کے دائری تفاعل وہی ہیں جو زاویہ عہ کے ہیں۔ نیز چونکہ زاویوں ۲ ن π - عہ سب کے سب ایک ہی دائری تفاعل رکھتے ہیں اس لئے (22)

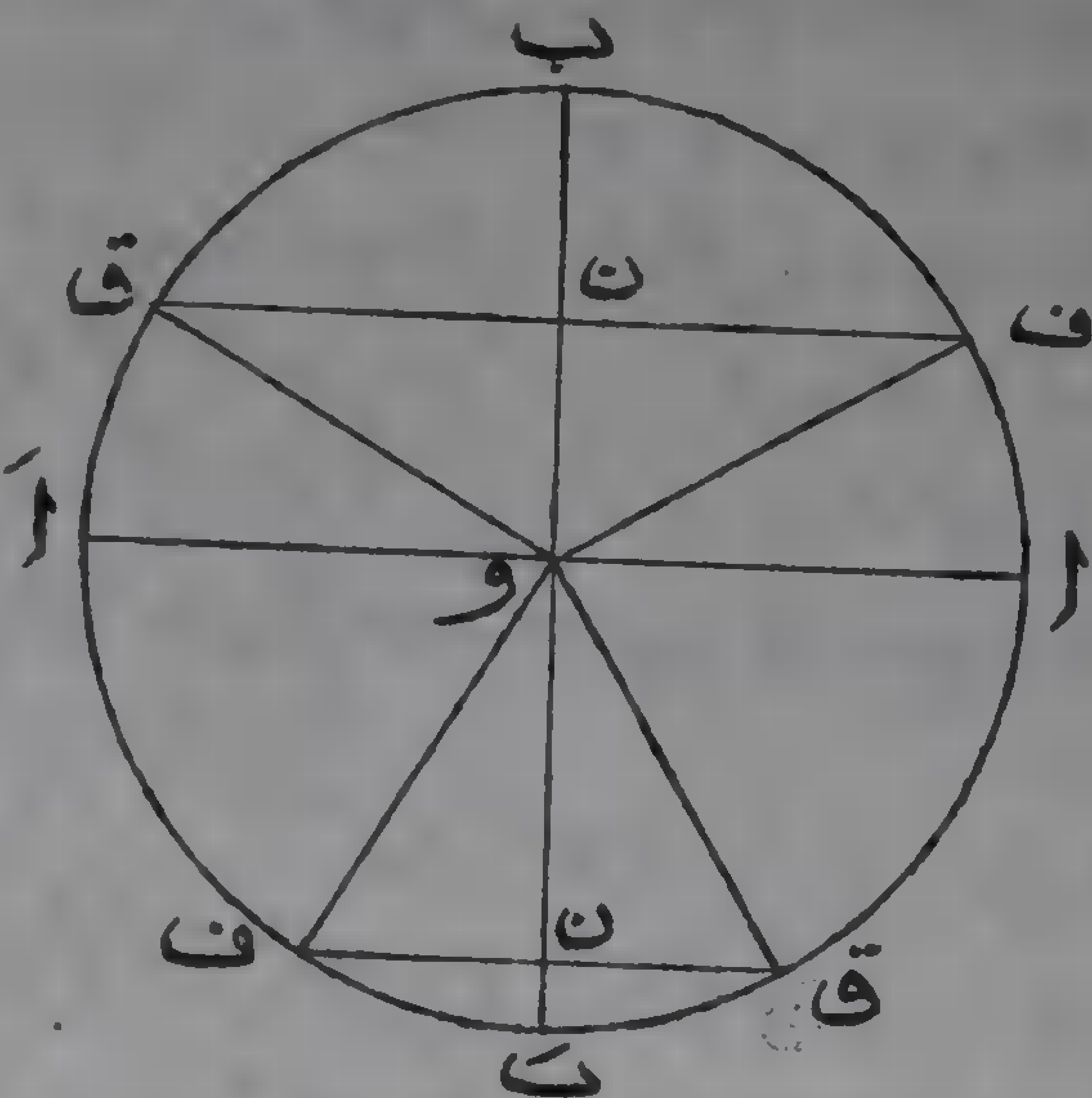
جب (۲ ن π - عہ) = جب (- عہ) = - جب عہ،

اور جم (۲ ن π - عہ) = جم (- عہ) = جم عہ

اوپر کی بحث میں جو خواص حاصل ہوئے ہیں وہ ذیل کی مساواتوں میں شامل ہیں:-

جب (۲ ن π ± عہ) = ± جب عہ
جم (۲ ن π ± عہ) = جم عہ ..... (۶)

۲۸ — اگر زاویہ ۱۸۰° - ا یا π - عہ، وق سے محدود ہو تو وق، و ا کے ساتھ وہی زاویہ بناتا ہے جو وف، و ا کے ساتھ بناتا ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ و ا پر وف اور وق کے ظل مساوی مگر علامت میں مختلف ہیں اور وب پر وف اور وق کے ظل مساوی اور ہم علامت ہیں، اس لئے جب (π - عہ) = جب عہ



اور جم (π − عہ) = − جم عہ، یہ مساواتیں درست رہتی ہیں خواہ عہ کچھ ہی ہو،
اس طرح عہ کو − عہ میں تبدیل کیا جاسکتا ہے اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

جب (π + عہ) = جب (− عہ) = − جب (عہ)،

(23) اور جم (π + عہ) = − جم (− عہ) = − جم عہ

پس مساواتوں کا یہ نظام

جب (π ± عہ) = ∓ جب عہ،
جم (π ± عہ) = − جم عہ } ... ... (۷)

حاصل ہوتا ہے اور ان سے ہم حاصل کرتے ہیں

مس (π ± عہ) = ± مس عہ ... ... (۸)

نیز جب ($\overline{۲ن+۱}$ π ± عہ) = جب (π ± عہ) = ∓ جب عہ
جم ($\overline{۲ن+۱}$ π ± عہ) = جم (π ± عہ) = − جم عہ } (۹)
مس ($\overline{۲ن+۱}$ π ± عہ) = مس (π ± عہ) = ± مس عہ

۲۹ — دفعہ ۲۸ کی شکل میں و ف جو زاویہ، و ب کے ساتھ بناتا ہے وہ ۹۰° + ا ہے، اس لئے زاویہ ۹۰ + ا یا $\frac{1}{2}\pi$ + عہ کی جیب التمام وہ نسبت ہے جو وَ بَ پر و ف کے ظل کو و ف سے ہے، پس چونکہ و بَ پر کا ظل مختلف علامت کے ساتھ، و ب پر کے ظل کے مساوی ہے اس لئے جم ($\frac{1}{2}\pi$ + عہ) = - جب عہ، $\frac{1}{2}\pi$ + عہ کو عہ میں تبدیل کرنے سے جم عہ = - جب (عہ - $\frac{1}{2}\pi$) پس (۶) کی رو سے

جم عہ = جب ($\frac{1}{2}\pi$ - عہ)

اِن مساواتوں میں اگر ہم چاہیں تو عہ کی علامت بدل سکتے ہیں کیونکہ عہ یا مثبت ہوگا یا منفی، پس ہمیں مساواتیں ملتی ہیں

جب ($\frac{1}{2}\pi$ ± عہ) = جم عہ
جم ($\frac{1}{2}\pi$ ± عہ) = ∓ جب عہ ‎.. .. .. .. (۱۰)
مس ($\frac{1}{2}\pi$ ± عہ) = ∓ مم عہ

نیز (۶) اور (۹) کی رو سے

جب ($\overline{م + \frac{1}{2}}\,\pi$ ± عہ) = $(-1)^{م}$ جب ($\frac{1}{2}\pi$ ± عہ)
جم ($\overline{م + \frac{1}{2}}\,\pi$ ± عہ) = $(-1)^{م}$ جم ($\frac{1}{2}\pi$ ± عہ)
مس ($\overline{م + \frac{1}{2}}\,\pi$ ± عہ) = مس ($\frac{1}{2}\pi$ ± عہ)

اس لئے

جب ($\overline{م + \frac{1}{2}}\,\pi$ ± عہ) = $(-1)^{م}$ جم عہ،
جم ($\overline{م + \frac{1}{2}}\,\pi$ ± عہ) = ∓ $(-1)^{م}$ جب عہ ‎.. .. (۱۱)
مس ($\overline{م + \frac{1}{2}}\,\pi$ ± عہ) = ∓ مم عہ

زاویہ π - عہ کو زاویہ عہ کا تکملہ کہتے ہیں اور زاویہ ½ π - عہ کو زاویہ عہ کا متمم کہتے ہیں۔

ہم بتا چکے ہیں کہ کسی زاویہ کی جیب اس کے تکمیلی زاویہ کی جیب کے مساوی ہوتی ہے اور کسی زاویہ کی جیب التمام اس کے تکمیلی زاویہ کی جیب التمام کے مساوی مگر مختلف علامت کے ساتھ، نیز کسی زاویہ کی جیب اس کے متمم زاویہ کی جیب التمام کے مساوی ہوتی ہے اور کسی زاویہ کی جیب التمام اس کے متمم زاویہ کی جیب کے مساوی۔ (24)

ضوابط (۶) تا (۱۱) کی مدد سے ہم کسی زاوئے کے دائری تفاعل معلوم کر سکتے ہیں جبکہ صفر اور ½ π کے درمیان اُس زاویہ کے دائری تفاعلوں کی قیمتیں معلوم ہوں جو دئے ہوئے زاویہ سے بقدر ½ π کے ضِعف کے بڑا یا چھوٹا ہو، یا ہم اُس وقت بھی معلوم کر سکتے ہیں جبکہ دئے ہوئے زاوئے کے متمم زاوئے کے دائری تفاعل معلوم ہوں۔

دائری تفاعلوں کی دَوریت

۳۰ــ جب متغیر لا کے تفاعل ف (لا) کی یہ خاصیت ہو کہ لا کی ہر قیمت کے لئے

ف (لا) = ف (لا + ک)

جہاں ک مستقل ہے تو تفاعل ف (لا) کو دَوری تفاعل کہتے ہیں، نیز اگر ک وہ چھوٹے سے چھوٹا مستقل ہو جسکے لئے یہ تفاعل یہ خاصیت رکھتا ہے تو ک کو تفاعل کا دَور کہتے ہیں۔

اب یہ فوراً مستنبط ہوتا ہے کہ اگر ف (لا) = ف (لا + ک) تو ف (لا) = ف (لا + ن ک) جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔ اگر لا کی اُن تمام قیمتوں کے لئے جو لا کی دو قیمتوں کے درمیان (جن کا فرق ک ہے) واقع ہیں تفاعل کی قیمتیں دی گئی ہوں تو لا کی باقی سب قیمتوں کے لئے تفاعل کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں، تفاعل کی یہ قیمتیں فی الحقیقت اُن قیمتوں کی صرف تکرار ہونگی جو مذکورہ وقفہ میں دی گئی ہیں۔

جب عہ اور جم عہ کی خاصیت (۶) سے واضح ہے کہ یہ تفاعل عہ کے دَوری تفاعل ہیں، اور ان کا دور ۲ π ہے، یا اگر زاویہ کی پیمایش درجوں میں ہو تو جب ا اور جم ا، ا کے دَوری تفاعل ہیں اور دَور ۳۶۰° ہے۔ خاصیت (۷) سے یہ امر واضح ہے کہ یہ تفاعل ایسے ہیں کہ ان کی قیمتیں زاویہ کی اُن قیمتوں کے لئے جن میں نصف مکمل دَور کا فرق ہے مساوی ہیں مگر علامت میں مختلف۔ خاصیت (۸) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مماس دَوری تفاعل ہے، اس کا مکمل دَور π ہے جو جیب اور جیب التمام کے دَور کا نصف ہے۔ ظاہر ہے کہ قاطع یا قاطع التمام کا دور ۲ π ہے اور مماس التمام کا π۔ آیندہ چل کر یہ معلوم ہوگا کہ دائری تفاعلوں کی اہمیت علم تحلیل کے نظریہ میں صرف اِن کی اسی خاصیت "دَوریت" کی وجہ سے ہے۔

دائری تفاعلوں کی علامت اور مقدار میں تبدیلیاں

۳۱ — اب ہم کسی زاویہ کے دائری تفاعلوں کی علامت اور مقدار میں جو تبدیلیاں وقوع پذیر ہوتی ہیں جبکہ زاویہ صفر سے چار قائمہ زاویوں تک بڑھتا ہے اُن کو معلوم کریں گے۔

(۱) کسی زاویہ کی جیب کی قیمت میں جو تبدیلیاں وقوع پذیر ہوتی ہیں اُن کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں دفعہ (۱۸) کی شکل میں ظل و ن کی مقدار اور علامت کی تبدیلیوں کا مشاہدہ کرنا چاہیئے۔ جب زاویہ ا (25)

صفر ہوتا ہے تو و ن صفر ہوتا ہے اور جیسے ا، ۹۰° تک بڑھتا ہے و ن مثبت رہتا ہے اور بڑھتا ہے تا آنکہ ا = ۹۰° اور اس صورت میں و ن، و ف کے مساوی ہوتا ہے، اس لئے جب ا مثبت ہے اور صفر سے ایک تک بڑھتا ہے۔ پھر جیسے ا، ۹۰° سے ۱۸۰° تک بڑھتا ہے و ن مثبت رہتا ہے اور گھٹتا ہے یہاں تک کہ ا، ۱۸۰° کے مساوی ہوتا ہے تو وہ پھر صفر ہو جاتا ہے، اس لئے جب ا مثبت ہے اور ایک سے صفر تک گھٹتا ہے۔ پھر جیسے ا، ۱۸۰° سے ۲۷۰° تک بڑھتا ہے تو و ن منفی ہوتا ہے اور عدداً بڑھتا ہے یہاں تک کہ اگر ا، ۲۷۰° ہو تو و ن = - و ف، اس لئے جب ا منفی ہے اور صفر سے - ا تک بدلتا ہے۔ نیز جیسے ا، ۲۷۰° سے ۳۶۰° تک بڑھتا ہے تو و ن منفی ہوتا ہے اور عدداً گھٹتا ہے یہاں تک کہ اگر ا، ۳۶۰° ہو تو وہ پھر صفر ہو جاتا ہے اس طرح جب ا منفی ہے اور - ا سے صفر تک بدلتا ہے۔

(۲) جیب التمام کی صورت میں ہمیں ظل و م کی علامت اور مقدار کی تبدیلیوں کا مشاہدہ کرنا چاہیئے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے ا، صفر سے ۹۰° تک بڑھتا ہے جم ا مثبت رہتا ہے اور ایک سے صفر تک گھٹتا ہے، جیسے ا، ۹۰° سے ۱۸۰° تک بڑھتا ہے جم ا منفی رہتا ہے اور صفر سے - ا تک تبدیل ہوتا ہے، جیسے ا، ۱۸۰° سے ۲۷۰° تک بڑھتا ہے جم ا منفی رہتا ہے اور - ا سے صفر تک تبدیل ہوتا ہے، اور جیسے ا، ۲۷۰° سے ۳۶۰° تک بڑھتا ہے جم ا مثبت رہتا ہے اور صفر سے ایک تک بڑھتا ہے۔

(۳) کسی زاویہ کے مماس کی تبدیلیوں کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں نسبت $\frac{\text{و ن}}{\text{و م}}$ پر غور کرنا چاہیئے، جب یہ زاویہ صفر ہوتا ہے تو یہ نسبت صفر ہوتی ہے اور جیسے یہ زاویہ صفر سے ۹۰° تک بڑھتا ہے یہ نسبت مثبت رہتی ہے اور بڑھتی ہے، جب یہ زاویہ ۹۰° کا ہوتا ہے تو ظل و م صفر ہے اور و ن اکائی کے مساوی ہے، پس مس ۹۰° = ∞، پھر جیسے

ا، ۹۰° سے ۱۸۰° تک بڑھتا ہے مماس منفی رہتا ہے اور -∞ سے صفر تک بدلتا ہے، جیسے ا، ۱۸۰° سے ۲۷۰° تک بڑھتا ہے مس ا مثبت رہتا ہے کیونکہ ون اور وم دونوں منفی ہیں اور وہ بڑھتا ہے حتیٰ کہ وہ لامتناہی ہو جاتا ہے جبکہ ا = ۲۷۰°، جیسے ا، ۲۷۰° سے ۳۶۰° تک بڑھتا ہے مماس منفی رہتا ہے اور -∞ سے صفر تک تبدیل ہوتا ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ مس ا، قیمت ۹۰° میں سے گزرتے وقت +∞ سے -∞ تک تبدیل ہوتا ہے اور ۲۷۰° میں سے گزرتے وقت -∞ سے +∞ تک بدلتا ہے، اس کی توضیح کے لئے صرف یہ بتا دینا ضروری ہے کہ اگر کوئی متغیر لا، صفر میں سے گزرتے وقت اپنی علامت بدلے تو اس کا متکافی $\frac{1}{لا}$، ∞ میں سے گزرتے وقت اپنی علامت بدلتا ہے۔

(26) (۴) اب چونکہ قاطع التمام، قاطع اور مماس التمام علی الترتیب جیب، جیب التمام اور مماس کے متکافی تفاعل ہیں اس لئے ان کی قیمتوں کی تبدیلیاں اوپر سے اخذ کیجا سکتی ہیں۔ ان کی قیمتیں، ا = ۰، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰°، ۳۶۰° کے لئے حسب ذیل جدول میں دی گئی ہیں جس میں وہ نتیجے بھی شامل ہیں جو جیب، جیب التمام، اور مماس کے لئے اوپر حاصل ہو چکے ہیں۔

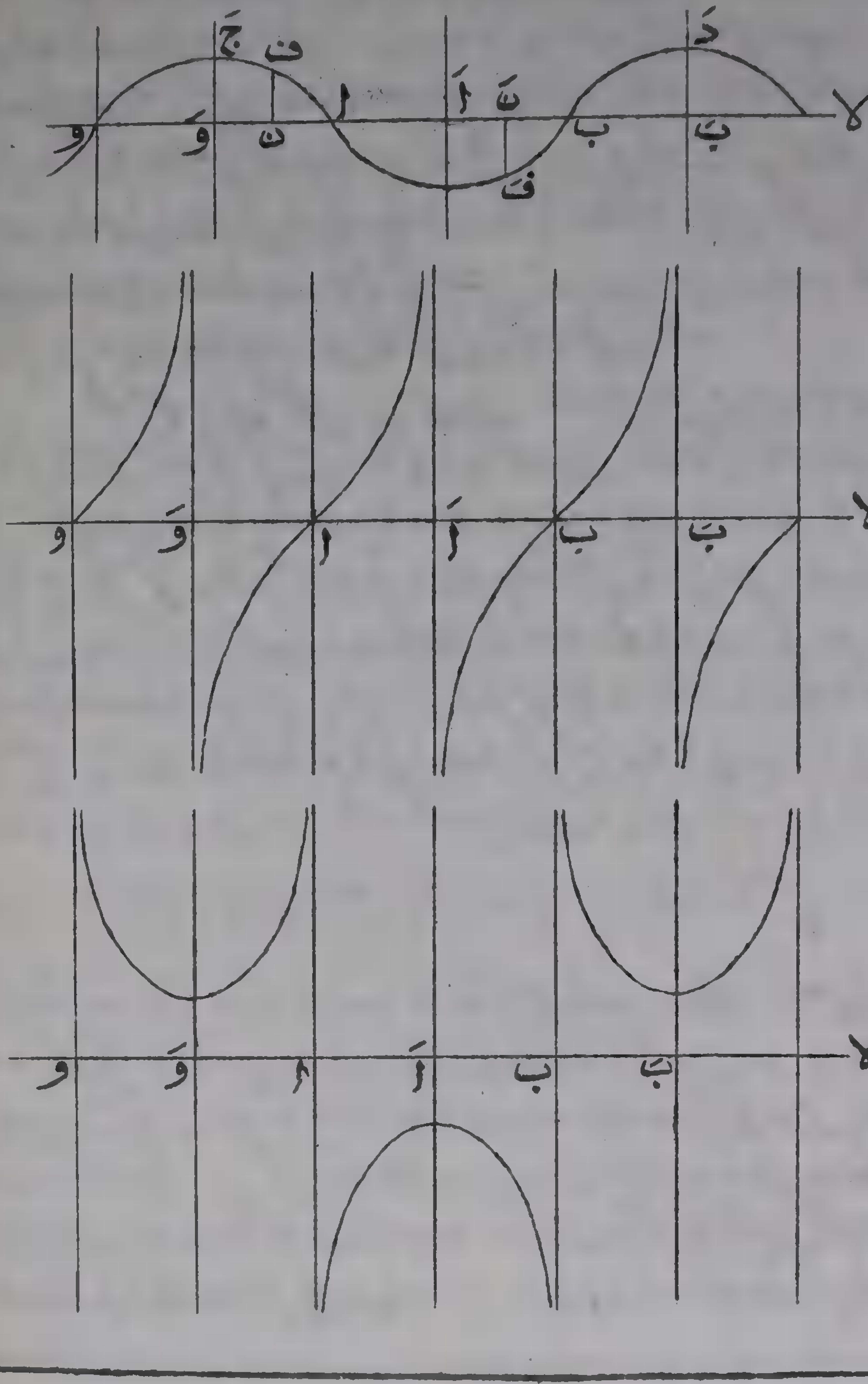
	°۰	۰ تا °۹۰	°۹۰	°۹۰ تا °۱۸۰	°۱۸۰	°۱۸۰ تا °۲۷۰	°۲۷۰	°۲۷۰ تا °۳۶۰	°۳۶۰
جب	۰	+	۱	+	۰	−	-۱	−	۰
جم	۱	+	۰	−	-۱	−	۰	+	۱
مس	۰	+	±∞	−	۰	+	±∞	−	۰
مم	∓∞	+	۰	−	∓∞	+	۰	−	∓∞
قط	۱	+	±∞	−	-۱	−	∓∞	+	۱
قم	∓∞	+	۱	+	±∞	−	-۱	−	∓∞

دائری تفاعلوں کی ہندسی تعبیر

۳۲ — دائری تفاعلوں کی قیمت کی تبدیلیوں کی ہندسی تعبیر حاصل کرنے کے لئے ہم یہ فرض کریں گے کہ کسی زاویہ کا دائری ناپ لا، ایک ثابت خط مستقیم پر ایک ثابت نقطہ سے کسی مستقل پیمانہ کی بموجب طول لا لینے سے تعبیر ہوتا ہے، اور تفاعل کی عددی قیمت اُس متناظر مُعین کے طول سے تعبیر ہوتی ہے جو دئے ہوئے خط مستقیم پر طول لا کے سرے میں سے عمود وار کھینچا گیا ہے، تب اِس مُعین کے سرے سے جو منحنی مرتسم ہوتا ہے وہ دائری تفاعل کی ترسیم کو تعبیر کریگا۔

اگلے صفحہ پر تین شکلیں ہیں جن میں سے پہلی شکل میں جب لا اور جم لا کی ترسیمیں دکھائی گئی ہیں۔ اگر و مبدا ہو جہاں سے طول لا ثابت خط مستقیم و لا پر ناپا گیا ہے اور و ا = ٹ، و ب = ۲ ٹ، وَوَ = $\frac{1}{2}$ ٹ، وَ جَ = ۱ تو منحنی و ف ا ف ب ایسا ہے کہ اس کا کوئی معین، جب لا کی اُس قیمت کو تقریباً تعبیر کرتا ہے جو صفر اور ۲ ٹ کے درمیان لا کی کسی ایک قیمت کے جواب میں ہے۔ اگر وَ کو مبدا لیا جائے اور وَبَ = ۲ ٹ تو منحنی جَ ف ف دَ، جم لا کی قیمت کو تعبیر کرتا ہے لا کی اُن قیمتوں کے جواب میں جو صفر اور ۲ ٹ کے درمیان ہیں، یہ نتیجہ رشتہ جم لا = جب ($\frac{1}{2}$ ٹ + لا) سے حاصل ہوا ہے۔ و ب کے آگے منحنی و ف ف ب، مبدا و کے ہر دو جانب، لا انتہا مرتبہ تکرار پائے گا۔ اسی طرح دوسری شکل میں مس لا اور مم لا کی ترسیمات دکھائی گئی ہیں، و مبدا ہے مس لا کے لئے اور وَ مبدا ہے مم لا کے لئے، وَ، اَ، بَ میں سے گزرنے والے مُعین منحنی کے متقارب ہیں، اِن نقطوں پر تفاعل لا متناہی قیمت میں سے گزرتے وقت علامت بدلتے ہیں۔ تیسری شکل میں قط لا اور قم لا کی ترسیمات دی گئی ہیں، و مبدا ہے قم لا کے لئے اور وَ مبدا ہے (27)

قطِ لا کے لئے، د، ا، ب میں سے گزرنے والے معین اس منحنی کے متقارب ہیں۔



(28)

مثال :- حسب ذیل تفاعلوں کی ترسیمات کھینچو۔

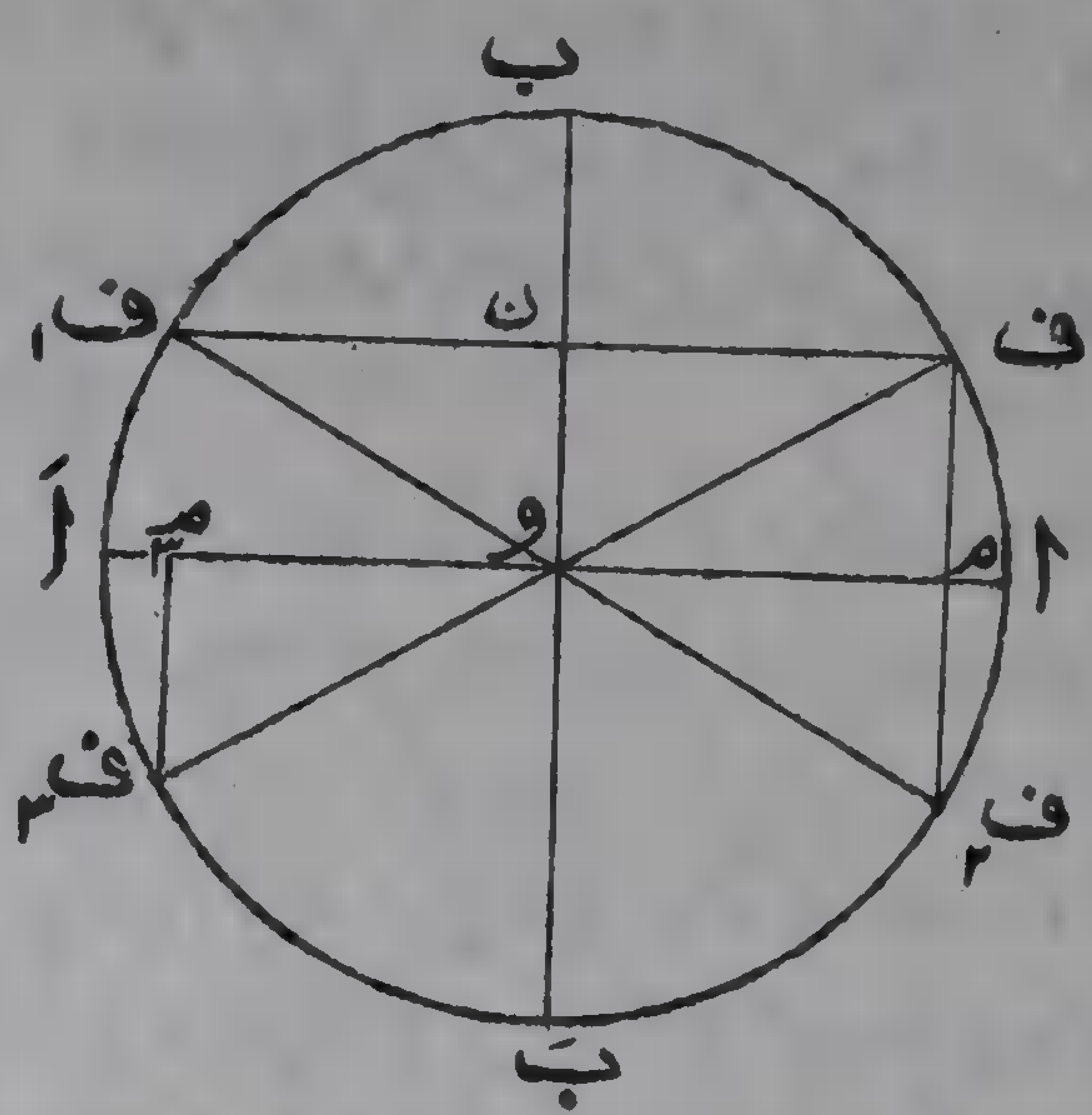
(۱) جب لا + جم لا (۲) جم (۲ جب لا) × جم (۲ جم لا)

(۳) مس لا + قط لا (۴) جب (۲ جم لا) \ جم (۲ جب لا)

(۵) جب^{۲} لا – ۲ جم لا (۶) جب ($\frac{۱}{۲}$ ۲ + $\frac{۱}{۳}$ ۲ جم لا)

وہ زاوئے جن کا دائری تفاعل وہی ہے

۳۳۔ اب ہم اُن تمام زاویوں کے لئے حلے معلوم کریں گے جن کے ایک دائری تفاعل کی قیمت اِن سب زاویوں کے لئے ایک ہی ہے۔



(۱) اگر شکل میں دیا ہوا زاویہ ا و ف ہو اور ف ف۱، و ا کے متوازی کھینچا جائے تو زاوئے (و ا، و ف) اور (و اَ و ف۱) ہی صرف وہ زاویے ہیں جن کی جیب وہی ہے جو زاویہ ا و ف کی ہے، کیونکہ صرف یہی وہ زاویے ہیں جن کے لئے و ب پر نصف قطر کا ظِل و ن کے مساوی ہے، یہ زاویے ۲ ن ۲ + عہ اور ۲ ن ۲ + ۲ – عہ ہیں جہاں عہ زاویہ ا و ف کا دائری ناپ ہے اور ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے،

یہ دونوں جملہ م π + (-۱)^{م} عہ میں شامل ہیں جہاں م کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے، پس یہ جملہ اُن تمام زاویوں کو بیان کرتا ہے جن کی جیب وہی ہے جو عہ کی ہے۔

(۲) پھر ف$_۲$ ف$_۱$ و ب کے متوازی کھینچو تو زاویے (و ا، و ف$_۱$) اور (و ا، و ف$_۲$) ہی صرف وہ زاویئے ہیں جن کی جیب التمام وہی ہے جو زاویہ ا و ف$_۱$ کی ہے، کیونکہ صرف یہی وہ زاوئیے ہیں جن کے لئے و ف کا ظل و ا پر و ھ کے مساوی ہے، یہ دونوں زاوئے ضابطہ ۲ م π ± عہ میں شامل ہیں، جہاں م کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

(۳) اگر ف$_۱$ و کو ف$_۳$ تک خارج کیا جائے تو زاوئے (و ا، و ف$_۱$) (29) اور (و ا، و ف$_۳$) ہی صرف وہ زاوئے ہیں جن کا مماس وہی ہے جو زاویہ عہ کا ہے، یہ زاوئے علی الترتیب ۲ ن π + عہ اور ۲ ن π + π + عہ ہیں اور اس لئے دونوں ضابطہ م π + عہ میں شامل ہیں، جہاں م کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

(۴) اب چونکہ جن زاویوں کا قاطع التمام ایک ہی ہو ان کی جیب بھی ایک ہی ہوتی ہے اس لئے م π + (-۱)^{م} عہ میں وہ تمام زاوئے شامل ہیں جن کا قاطع التمام وہی ہے جو عہ کا ہے؛ اسی طرح ۲ م π ± عہ میں وہ تمام زاوئے شامل ہیں جن کا قاطع وہی ہے جو عہ کا ہے، اور م π + عہ میں وہ تمام زاوئے شامل ہیں جن کا مماس التمام وہی ہے جو عہ کا ہے۔

اوپر کی ہر صورت میں م یا ن کی قیمتوں میں صفر بھی داخل ہے۔

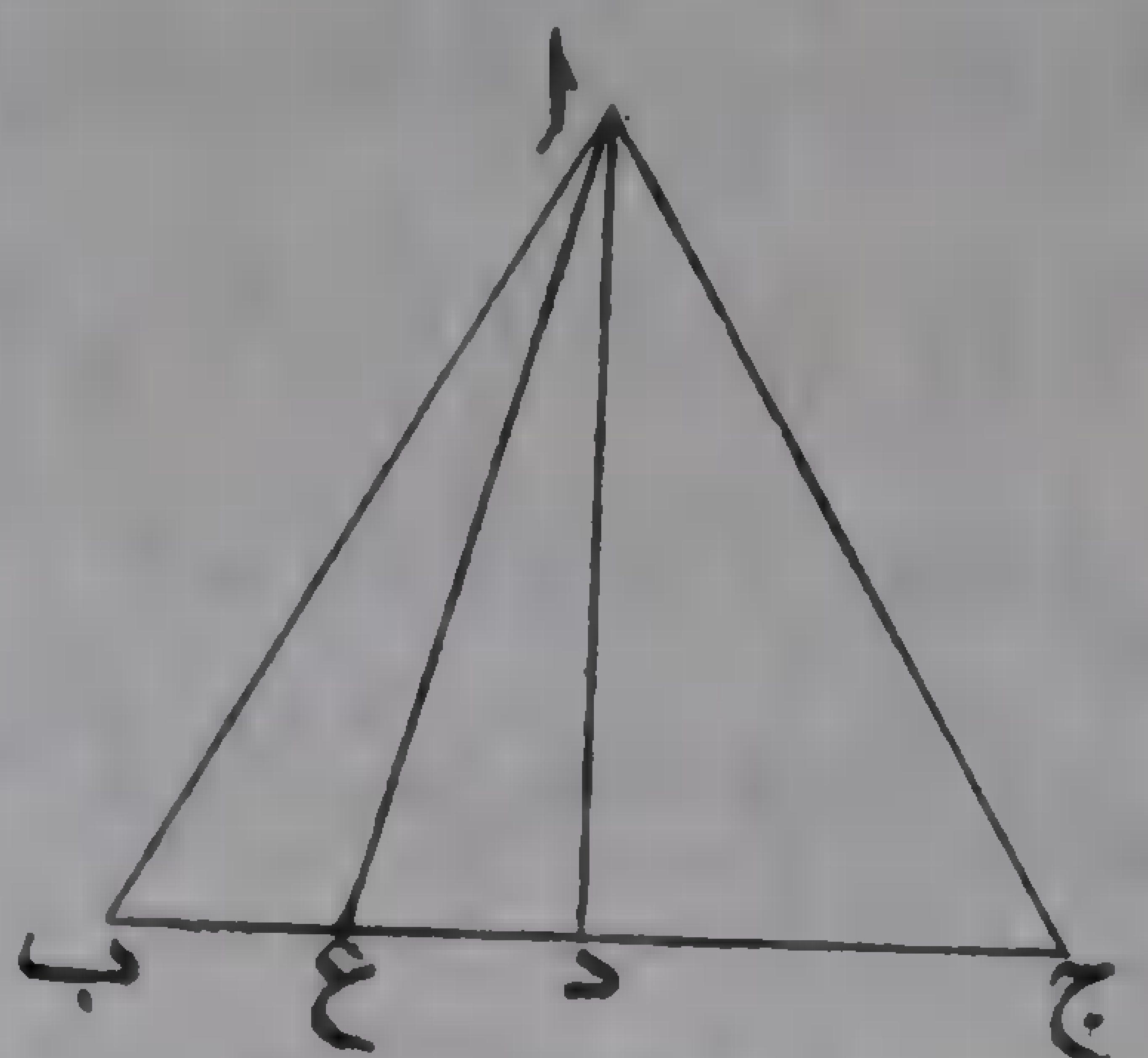
بعض زاویوں کے دائری تفاعلوں کی قیمتوں کا تعین

۴۳ — چند اہم زاویوں کے دائری تفاعلوں کی قیمتیں سادہ ہندسی طریقوں سے حاصل ہوسکتی ہیں۔

(۱) زاویہ ۴۵° یا $\frac{۱}{۴}$ π، قائم الزاویہ مثلث متساوی الساقین کا ایک حادہ زاویہ ہے، اس زاویہ کی جیب اور جیب التمام صریحاً ایک

دوسرے کے مساوی ہیں، اور چونکہ ان کے مربعوں کا مجموعہ ایک کے مساوی ہے، ان میں سے ہر ایک $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کے مساوی ہے، اس زاویہ کا ماس ایک ہے۔

(۲) مثلث متساوی الاضلاع کا ہر زاویہ ۶۰° یا $\frac{1}{3}\pi$ ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ ا ب ج متساوی الاضلاع مثلث ہے، ب ج پر عمود ا د کھینچو تو زاویہ ب کی جیب التمام $\frac{\text{ب د}}{\text{ا ب}}$ ہے اور یہ $\frac{1}{2}$ کے مساوی ہے، اسی زاویہ کی جیب، $\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ہے۔ ۶۰° کا متمم ۳۰° یا $\frac{1}{6}\pi$ ہے، پس
(30) جم ۳۰° = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ اور جب ۳۰° = $\frac{1}{2}$، نیز مس ۶۰° = $\sqrt{3}$ اور مس ۳۰° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(۳) زاویہ د ا ب کا نصف ا ع کھینچو تو زاویہ د ا ع = ۱۵° یا $\frac{1}{12}\pi$،

اقلیدس مقالہ ششم مسئلہ ۳ کی رو سے

$$\frac{\text{د ع}}{\text{ع ب}} = \frac{\text{د ا}}{\text{ا ب}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

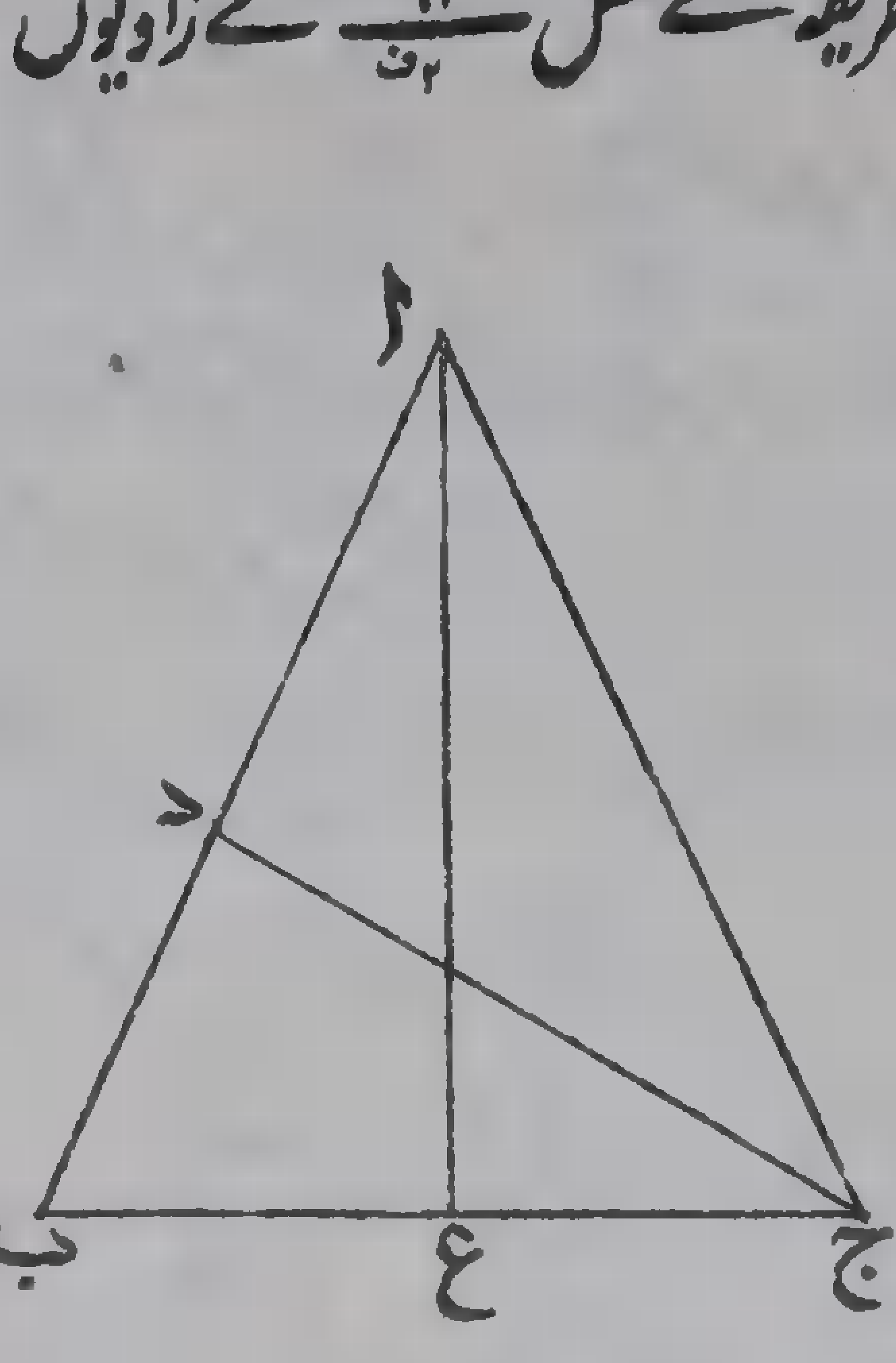
$$\therefore \quad \frac{\text{د ع}}{\text{د ب}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$$

اور ان سے $\frac{\text{دع}}{\text{دا}}$ یعنی مس ۱۵° = $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}$ = ۲ − $\sqrt{3}$، پس اِس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{،} \quad \text{جم } 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

ہم اِن قیمتوں سے ۱۵° کے متمم زاویہ ۷۵° یا $\frac{5}{12}\pi$ کی جیب، جیب التمام اور مماس حاصل کر سکتے ہیں۔ اگر ہم پھر زاویہ د ا ع کی تنصیف کریں تو ہمیں ۷° ۳۰′ یا $\frac{\pi}{24}$ کا مماس حاصل ہونا چاہیئے اور ہم اس طریقہ کو جاری رکھ کر شکل $\frac{\pi}{3 \times 2^{\text{ف}}}$ کے تمام زاویوں کے مماس حاصل کر سکتے ہیں جہاں ف ایک مثبت صحیح عدد ہے، لیکن ہم آئندہ ایسے ضابطے حاصل کریں گے جن کی مدد سے اِن زاویوں کے تفاعلوں کو یکے بعد دیگرے محسوب کیا جا سکتا ہے، اس طرح ہندسی عمل کو جاری رکھنے کی ضرورت باقی نہیں رہتی۔

اس کے مشابہ ہندسی طریقہ سے شکل $\frac{\pi}{2^{\text{ف}}}$ کے زاویوں کے دائری تفاعل حاصل ہو سکتے ہیں۔



(۴) فرض کرو کہ ا ب ج ایک مثلث ہے جس میں قاعدہ پر کے زاویوں میں سے ہر ایک اس پر کے زاویہ کا دوچند ہے یعنی قاعدہ پر کا ہر زاویہ ۷۲° یا $\frac{2}{5}\pi$ ہے، اور

(31) زاویہ راس ۳۶° یا $\frac{1}{5}\pi$ ۔ اگر اب کو د پر تقسیم کیا جائے اس طور پر کہ اب × ب د = اد² تو اقلیدس مقالہ چہارم مسئلہ ۱۰ میں یہ بتایا گیا ہے کہ اد = دج = ج ب ۔ اب ب ج پر اع عمود نکالو۔ اگر نسبت $\frac{\text{اد}}{\text{اب}}$ کو لا سے تعبیر کیا جائے تو ۱ − لا = لا² اور اس دو درجی مساوات کو حل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ لا = $\frac{1}{2}(\pm\sqrt{5}-1)$ ہمیں مثبت اصل لینی چاہیئے، پس $\frac{\text{اد}}{\text{اب}} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$،

اس طرح　جم ۷۲° = جب ۱۸° = $\frac{1}{2}\,\frac{\text{ب ج}}{\text{اب}} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$،

اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے جب ۷۲° = جم ۱۸° = $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

نیز جم ۳۶° = $\frac{1}{2}\,\frac{\text{اج}}{\text{اد}}$ کیونکہ د اج ایک متساوی الساقین مثلث ہے؛

اس لئے جم ۳۶° = $\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$، پس جب ۳۶° = $\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

نیز چونکہ ۳۶° کا متمم ۵۴° ہے، اسلئے جب ۵۴° اور جم ۵۴° کی قیمتیں بھی حاصل ہو جاتی ہیں۔

ذیل کی جدول میں محصلہ قیمتیں حوالہ کے لئے اکٹھی کی گئی ہیں:—
پہلی سطر کے تفاعل پہلے ستون کے زاویوں کے لحاظ سے ہیں اور آخری سطر کے تفاعل آخری ستون کے زاویوں کے لحاظ سے

	مماس التمام	مماس	جیب التمام	جیب	
$\frac{5}{12}\pi = 75°$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{12}\pi = 15°$
$\frac{2}{5}\pi = 72°$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{10}\pi = 18°$
$\frac{1}{3}\pi = 60°$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}\pi = 30°$
$\frac{3}{10}\pi = 54°$	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{5}\pi = 36°$
$\frac{1}{4}\pi = 45°$	1	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4}\pi = 45°$
	مماس	مماس التمام	جیب	جیب التمام	

اب ہم ضوابط (۶) تا (۱۱) استعمال کر کے کسی ایسے زاویئے کے دائری تفاعل فوراً حاصل کر سکتے ہیں جو اوپر کی جدول میں مندرجہ زاویوں میں سے کسی زاویہ سے زاویہ قائمہ کے کسی ضِعف کا فرق رکھتا ہو۔

مثال :- ۱۲۰° اور -۵۷۶° کی جیب اور جیب التمام معلوم کرو۔ (32)

چونکہ ۱۲۰° = ۹۰° + ۳۰° ، اس لئے

جب ۱۲۰° = جم ۳۰° = ½ √۳ ،

جم ۱۲۰° = - جب ۳۰° = - ½ ؛

نیز چونکہ -۵۷۶° = - (۳ × ۱۸۰° + ۳۶°)، اس لئے

جب (-۵۷۶°) = جب (۱۸۰° - ۳۶°) = جب ۳۶° ،

اور جم (-۵۷۶°) = جم (۱۸۰° - ۳۶°) = - جم ۳۶°

مقلوب دائری تفاعل

۳۵- اگر ما، لا کا تفاعل ف (لا) ہے تو لا کو ما کا ایک تفاعل سمجھا جا سکتا ہے۔ اِس تفاعل کو ف (لا) کا مقلوب تفاعل کہتے ہیں اور اس کو بالعموم ف⁻¹ (ما) سے تعبیر کرتے ہیں، اس طرح لا = ف⁻¹ (ما)، اگر ف (لا) دَوری تفاعل ہو جس کا دَور ک ہے اور اس لئے ف (لا) = ف (لا + م ک) جہاں م کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے تو تفاعل ف⁻¹ (ما) کی قیمتیں تعداد میں لا انتہا ہونگی جو لا + م ک سے حاصل ہوں گی جبکہ لا، ف⁻¹ (ما) کی کوئی ایک قیمت ہو، ما کے ایسے تفاعل کو کثیر قیمتی تفاعل کہتے ہیں، کیونکہ متغیر ما کی ہر قیمت کے جواب میں اس کی ایک واحد قیمت نہیں ہوتی۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ دَوری تفاعل ف (لا) = ما کے متناظر ایک کثیر قیمتی مقلوب تفاعل ف⁻¹ (ما) ہے جس کی قیمتوں کی تعداد ما کی کسی ایک قیمت کے لئے لا انتہا ہے، یہ

قیمتیں ایک دوسرے سے اتنا فرق رکھتی ہیں جو ف (لا) کے دَور کے کسی ضعف کے مساوی ہوتا ہے۔

۴۶ــــ اگر صفر اور ک کے درمیان واقع ہونیوالی لا کی دو یا دو سے زیادہ قیمتیں ہوں جن کے لئے ف (لا) کی قیمتیں مساوی ہوتی ہیں تو ف⁻¹(ما) کی قیمتوں کی کثرت اور بڑھجاتی ہے، کیونکہ ف⁻¹ (ما) کی قیمتوں میں اوّل تو لا کی ہر وہ قیمت ہے جس کے لئے ف (لا) = ما اور پھر قیمتوں کے وہ لا متناہی سلسلے ہیں جو لا کی ہر قیمت میں ک کے ضعف جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ صفر اور ک کے درمیان لا کی دو قیمتیں لا₁، لا₂ ہیں جن کے لئے ف (لا) = ما تو مقلوب تفاعل ف⁻¹ (ما) کی قیمتوں کے دو جتھے لا₁ + م ک، لا₂ + ن ک ہیں۔

۴۷ــــ دائری تفاعل جب لا = ما کی صورت میں مقلوب تفاعل جب⁻¹ (ما) کی قیمتیں ن π + (-۱)ⁿ لا₁ ہیں جس میں لا₁ لا کی کوئی قیمت ہے جس کے لئے جب لا₁ = ما، اس صورت میں جب لا کا مکمل دَور ۲ π ہے، اور صفر اور ۲ π کے درمیان لا کی دو قیمتیں ہیں (فرض کرو) لا₁ اور π - لا₁ جن کے لئے جب لا = ما، پس جب⁻¹ ما کی قیمتوں کے دو سلسلے ن × ۲ π + لا₁ اور ن × ۲ π + π - لا₁ ہیں اور یہ دونوں سلسلے ن π + (-۱)ⁿ لا₁ میں شامل ہیں

اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ جم⁻¹ ما کی قیمتیں ۲ ن π ± لا₁ میں شامل ہیں، جہاں جم لا₁ = ما۔

تفاعل مس لا، مم لا کے دَور π ہیں جو جب لا اور جم لا کے دَور کا (33) صرف نصف ہیں، اور صفر اور π کے درمیان لا کی صرف ایک قیمت ہے جس کے لئے مس لا یا مم لا ایک دی ہوئی قیمت اختیار کرتا ہے، اس طرح مس⁻¹ ما کی قیمتیں ن π + لا₁ ہیں اور مم⁻¹ ما کی قیمتیں ن π + لا₁ جہاں لا₁ صفر اور π کے درمیان لا کی وہ قیمت ہے جس کے لئے مس لا₁ = ما یا مم لا₁ = ما۔

۳۸۔ اگر لا عدداً وہ چھوٹی سے چھوٹی مقدار ہو جس کی علامت وہی ہے جو ما کی ہے اور جس کے لئے جب لا = ما تو اس چھوٹی سے چھوٹی مقدار لا کو جب$^{-1}$ ما کی صدر قیمت کہتے ہیں۔ مس$^{-1}$ ما، مم$^{-1}$ ما، قم$^{-1}$ ما کی صدر قیمتوں کی تعریف بھی اسی طرح کیجا سکتی ہے

اگر لا عدداً وہ چھوٹی سے چھوٹی مثبت مقدار ہو جسکے لئے جم لا = ما تو اس کو جم$^{-1}$ ما کی صدر قیمت کہتے ہیں، ایسی ہی تعریف قط$^{-1}$ ما کی صدر قیمت کے لئے استعمال ہوگی۔

اس طرح جب$^{-1}$ ما، مس$^{-1}$ ما، مم$^{-1}$ ما، قم$^{-1}$ ما کی صدر قیمتیں $\pm \frac{1}{2}\pi$ کے درمیان واقع ہوتی ہیں، اور جم$^{-1}$ ما، قط$^{-1}$ ما کی صدر قیمتیں صفر اور π کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ بعض تصنیفات میں جب$^{-1}$ ما، جم$^{-1}$ ما، مس$^{-1}$ ما کی صدر قیمتوں کو جب$^{-1}$ ما ($\text{Sin}^{-1} y$)، جم$^{-1}$ ما ($\text{Cos}^{-1} y$) مس$^{-1}$ ما ($\text{Tan}^{-1} y$) سے تعبیر کیا جاتا ہے، تب عام قیمتیں اس طرح لکھی جاتی ہیں:-

جب$^{-1}$ ما = ن π + $(-1)^{ن}$ جب$^{-1}$ ما، جم$^{-1}$ ما = ۲ ن $\pi \pm$ جم$^{-1}$ ما،

مس$^{-1}$ ما = ن π + مس$^{-1}$ ما

لیکن ہم یہ ترقیم استعمال نہیں کریں گے۔ یہ یاد رکھنا چاہیئے کہ بہت سی مساواتوں میں جن میں یہ مقلوب تفاعل موجود ہوتے ہیں یہ فرض کرنا ضروری ہے کہ اِن تفاعلوں کی صرف صدر قیمتیں استعمال ہوئی ہیں یا بہر صورت قیمتوں کا انتخاب محدود ہے۔ مثلاً جب$^{-1}$ ما + جم$^{-1}$ ما = $\frac{1}{2}\pi$ جیسی مساوات میں مقلوب تفاعلوں کی قیمتوں کا انتخاب محدود و مقید ہے۔

یہ بھی مشاہدہ طلب ہے کہ تفاعلوں جم$^{-1}$ ما، جب$^{-1}$ ما کی تعریف ما کی صرف اُن قیمتوں کے لئے کی گئی ہے جو ± 1 کے درمیان واقع ہیں، ما کی ان حدود کے باہر یہ تفاعل کوئی معنی نہیں رکھتے جب تک کہ وہ موجودہ تعریف کے تحت ہیں۔ طالب علم کو مشق کے طور پر مختلف مقلوب تفاعلوں کی ترسیمیں کھینچنا چاہیئے۔ یورپ کے دیگر ممالک کی تصانیف

میں مقلوب تفاعل $\text{جب}^{-1}\text{لا}$ $\text{جم}^{-1}\text{لا}$ $\text{مس}^{-1}\text{ما}$ کی بجائے قوس جب لا، قوس جم لا، قوس مس لا استعمال ہوتے ہیں۔

تیسرے باب پر مثالیں

۱۔ متماثلات ذیل ثابت کرو:

$$(\text{۱})\quad \text{مس ا}\,(\text{۱} - \text{مم}^{\text{۲}}\,\text{ا}) + \text{مم ا}\,(\text{۱} - \text{مس}^{\text{۲}}\,\text{ا}) = \text{۰}\,،$$

$$(\text{۲})\quad (\text{جب ا} + \text{قط ا})^{\text{۲}} + (\text{جم ا} + \text{قم ا})^{\text{۲}} = (\text{۱} + \text{قط ا قم ا})^{\text{۲}}$$

۲۔ ایک زاویہ کی جیب $\dfrac{\text{م}^{\text{۲}} - \text{ن}^{\text{۲}}}{\text{م}^{\text{۲}} + \text{ن}^{\text{۲}}}$ ہے، باقی دائری تفاعل معلوم کرو۔

(34) ۳۔ اگر $\text{مس ا} + \text{جب ا} = \text{م}$، $\text{مس ا} - \text{جب ا} = \text{ن}$

تو ثابت کرو کہ $\text{م}^{\text{۲}} - \text{ن}^{\text{۲}} = \text{۴}\sqrt{\text{م ن}}$

۴۔ اگر $\dfrac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}} = \text{ف}$، $\dfrac{\text{جم ا}}{\text{جم ب}} = \text{ق}$ تو مس ا اور مس ب معلوم کرو۔

۵۔ اگر $\dfrac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}} = \sqrt{\text{۲}}$، $\dfrac{\text{مس ا}}{\text{مس ب}} = \sqrt{\text{۳}}$ تو ا اور ب معلوم کرو۔

۶۔ اگر $\text{جم ا} = \text{مس ب}$، $\text{جم ب} = \text{مس ج}$، $\text{جم ج} = \text{مس ا}$
تو ثابت کرو کہ $\text{جب ا} = \text{جب ب} = \text{جب ج} = \text{۲ جب ۱۸}^\circ$

۷۔ اِن مساواتوں کو حل کرو:-

$$(\text{۱})\quad \text{جب ط} + \text{۲ جم ط} = \text{۱}\,،$$

$$(\text{۲})\quad \frac{\text{جم ع}}{\text{مس ع}} = \frac{\text{۳}}{\text{۲}}\,،$$

$$(\text{۳})\quad \sqrt{\text{۳}}\;\text{قم}^{\text{۲}}\,\text{ط} = \text{۴ مم ط}$$

۸۔ اِن مساواتوں کو حل کرو:-

$$\left.\begin{aligned} \text{جم}\,(\text{۲ لا} + \text{ما}) &= \text{جب}\,(\text{لا} - \text{۲ ما}) \\ \text{جم}\,(\text{لا} + \text{۲ ما}) &= \text{جب}\,(\text{۲ لا} - \text{ما}) \end{aligned}\right\}$$

۹— ط کے لئے ایک عام جملہ معلوم کرو جبکہ جب^{۲} ط = جب^{۲} عہ اور نیز جبکہ

جب ط = - جم ط = $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۱۰- اُن حدود کی عام قیمتیں دریافت کرو جن کے درمیان ا کی تمام قیمتوں کے لئے جب^{۲} ا ، جم^{۲} ا سے بڑا ہو۔

۱۱- ط کی عام قیمت معلوم کرو جبکہ ۹ قط^{۴} ط = ۱۶

۱۲- اگر مس (π مم ط) = مم (π مس ط)

تو مس ط = $\frac{۱}{۴}$ { ۲ ن + ۱ ± $\sqrt{۴ ن^{۲} + ۴ ن - ۱۵}$ }

جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے جو ایک اور -۲ کے درمیان واقع نہیں ہے۔

۱۳- ایک دئے ہوئے زاویے کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرنے کا ہندسی طریقہ بیان کرو کہ ان دو حصوں کی (۱) جیوب ، (۲) مماس ایک دی ہوئی نسبت میں ہوں۔

۱۴- وہ زاویہ بناؤ جس کا مماس ۳ - $\sqrt{۲}$ ہے۔

۱۵- ایک دئے ہوئے زاویہ کو دو حصوں میں تقسیم کرو جن کی جیب التماموں کا مجموعہ ایک دی ہوئی مقدار ج ہو۔ وہ بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں معلوم کرو جو ج اختیار کرسکتا ہے۔

۱۶- اگر ع$_{ن}$ = جم^{ن} ط + جب^{ن} ط

تو ثابت کرو کہ

۲ ع$_{۶}$ - ۳ ع$_{۴}$ + ۱ = ۰ ،

۶ ع$_{۱۰}$ - ۱۵ ع$_{۸}$ + ۱۰ ع$_{۶}$ - ۱ = ۰

۱۷- دو دائرے ، (نیم قطر ا ، ب) ایک دوسرے کو خارجاً مس کرتے ہیں اور ط وہ زاویہ ہے جو ان دائروں کے مشترک مماسوں کے درمیان ہے ، ثابت کرو کہ

جب ط = $\frac{۴(ا - ب)\sqrt{اب}}{(ا + ب)^{۲}}$

(35) ۱۸— ایک مخروط مضلع کا قاعدہ ضلع ا کا مربع ہے، اس کا راس قاعدہ کے نقطہ وسطی میں سے گزرنے والے ایک خط پر واقع ہے جو قاعدہ پر عمود ہے، نیز راس قاعدہ سے ف فاصلہ پر واقع ہے۔
ثابت کرو کہ دو متصلہ رخوں کے درمیان زاویہ عہ اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب عہ} = \frac{\text{۲ف}\sqrt{\text{۲ا}^{۲} + \text{۴ف}^{۲}}}{\text{ا}^{۲} + \text{۴ف}^{۲}}$$

۱۹— دو مستوی ایک دوسرے کو علی القوائم خط ا ب پر قطع کرتے ہیں، اور ایک تیسرا مستوی ان کو خطوط ا د، ا ج پر قطع کرتا ہے، اگر زاویوں د ا ب، ج ا ب کو علی الترتیب عہ، بہ سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ ب ا جو زاویہ مستوی ج ا د سے بناتا ہے حسب ذیل ہے:

$$\text{مس}^{-1}\frac{\text{مس عہ مس بہ}}{\sqrt{\text{مس}^{۲}\text{عہ} + \text{مس}^{۲}\text{بہ}}}$$

۲۰— اگر ایک قائم الزاویہ متوازی السطوح کا وتر و د ہو تو ثابت کرو کہ و د اور اُس رخ کے وتروں کے درمیان جس کے متصلہ اضلاع و ا، و ب ہیں جو زاویے بنتے ہیں اُن کے جیوب التمام علی الترتیب ہیں

$$\frac{\text{ا ب}}{\text{و د}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{و ا}^{۲} - \text{و ب}^{۲}}{\text{و د} \times \text{ا ب}}$$

۲۱— دو دائرے جن کے نیم قطروں کا مجموعہ ا ہے ایک ہی مستوی میں رکھے گئے ہیں اس طور پر کہ ان کے مرکز ۲ ا فاصلہ پر ہیں۔ ایک بے سرا تاگا خوب تنا ہوا دائروں کو گھیرتا ہے اور ان کے درمیان خود کو قطع کرتا ہے۔
ثابت کرو کہ تاگے کا طول $\left(\frac{۴}{۳}\pi + ۲\sqrt{۳}\right)$ ا ہے۔

۲۲— ثابت کرو کہ

$$\text{جم مس}^{-1}\,\text{جب مم}^{-1}\,\text{لا} = \left(\frac{\text{لا}^{۲} + ۱}{\text{لا}^{۲} + ۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

۲۳ — تفاعلات ۳ جب لا + ۴ جم لا، لا جب لا، اور جب ($\frac{\pi}{۲}$ جب لا) کی مقدار اور علامت کی تبدیلیاں لا کی تمام قیمتوں کے لئے ترسیمی طور پر ظاہر کرو۔

ثابت کرو کہ مساوات ۲ لا = (۲ ن + ۱) π سہہ لا کی حقیقی اصلوں کی تعداد ۲ ن + ۳ ہے اور اس سے زیادہ نہیں، جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔ انکے مقامات تقریبی طور پر بتاؤ۔

---

(36)

چوتھا باب

دو یا دو سے زیادہ زاویوں کے دائری تفاعل

جیب اور جیب التمام کے لئے جمع اور تفریق کے ضابطے

۳۹۔ اب ہم دو زاویوں کے مجموعہ اور فرق کے دائری تفاعلوں کے لئے جملے اِن زاویوں کے دائری تفاعلوں کی رقوم میں معلوم کرینگے۔

فرض کرو کہ کسی مقدار ا کا ایک زاویہ ا و ب، مثبت یا منفی، ایک خطِ مستقیم سے تکوین پاتا ہے جو و کے گرد ابتدائی محل و ا سے گھومتا ہے بہ حالیکہ زاویہ کی علامت سے متعلق ہماری قرارداد وہی ہے، اور نیز فرض کرو کہ کسی مقدار ب کا ایک زاویہ ب و ج ایک خطِ مستقیم سے مرتسم ہوتا ہے جو ابتدائی محل و ب سے گھومتا ہے۔ تب زاویہ ا و ج = ا + ب۔

و ج میں کوئی نقطہ ف لو، اور و ب پر ف ن عمود کھینچو۔

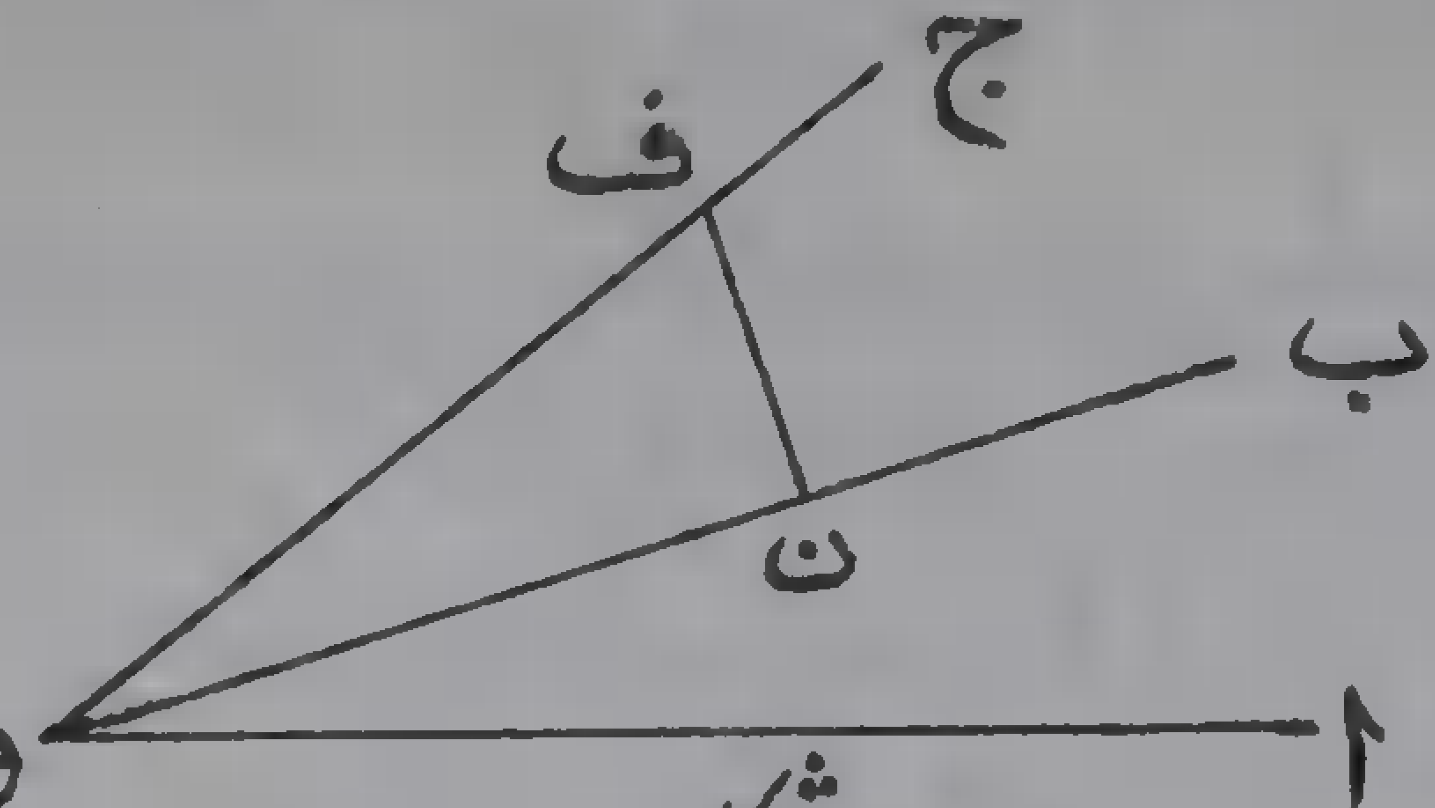
دفعہ ۱۵ کی قرارداد کے مطابق خطِ مستقیم و ن مثبت یا منفی ہے بموجب اس کے کہ وہ و ب میں ہو یا و ب ممدودہ میں، نیز ن ف مثبت ہے جبکہ وہ و ب کی مثبت جانب واقع ہو اور مخالف سمت ساعت میں گھومنے اور منفی ہے جبکہ وہ دوسری جانب واقع ہو۔ اس خطِ مستقیم کی مثبت سمت جس پر ن ف واقع ہے و ا کے ساتھ زاویہ ا + ۹۰° بناتی ہے۔

و ن = و ف جم ب اور ن ف = و ف جب ب، کیونکہ و ن اور ن ف

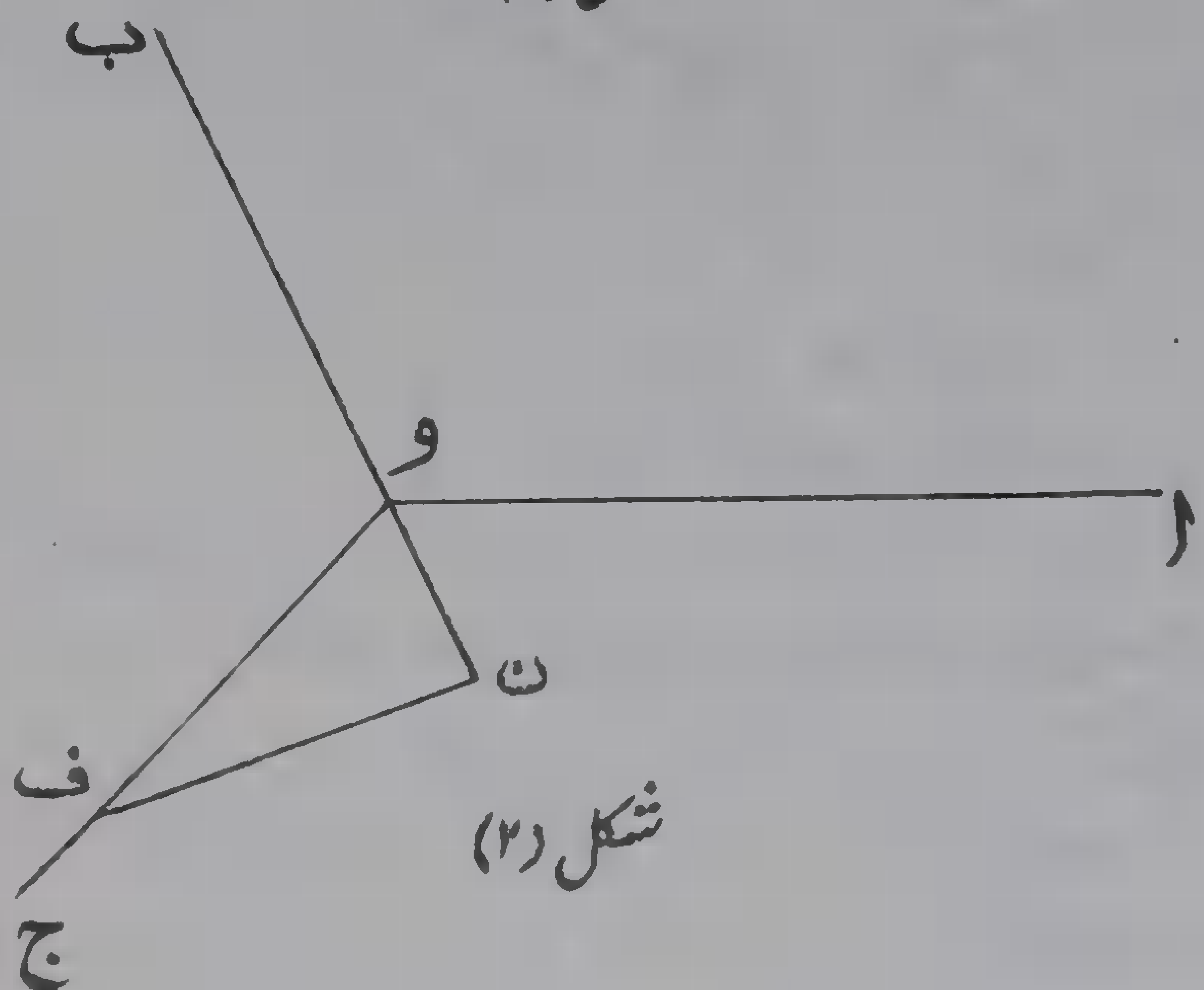
ظل ہیں و ف کے و ب پر اور اُس خط پر جو و ا کے ساتھ ا + ۹۰° کا زاویہ بناتا ہے۔

شکل (۱) میں زاویوں ا، ب میں سے ہر ایک مثبت ہے اور ۹۰° سے کم، شکل (۲) میں ا، ۹۰° اور ۱۸۰° کے درمیان واقع ہے اور زاویہ ب بھی ۹۰° اور ۱۸۰° کے درمیان واقع ہے، شکل (۳) میں زاویہ ا، ۱۸۰° اور ۲۷۰° کے درمیان واقع ہے، اور زاویہ ب منفی ہے اور -۹۰° اور -۱۸۰° کے درمیان واقع ہے۔ اشکال (۱) اور (۲) میں ن ف کا طول مثبت ہے اور شکل (۳) میں ن ف کا طول منفی ہے کیونکہ اس آخری صورت میں ف ن اُس خط کی سمت ہے جو و ا کے ساتھ ا + ۹۰° کا زاویہ بناتی ہے۔

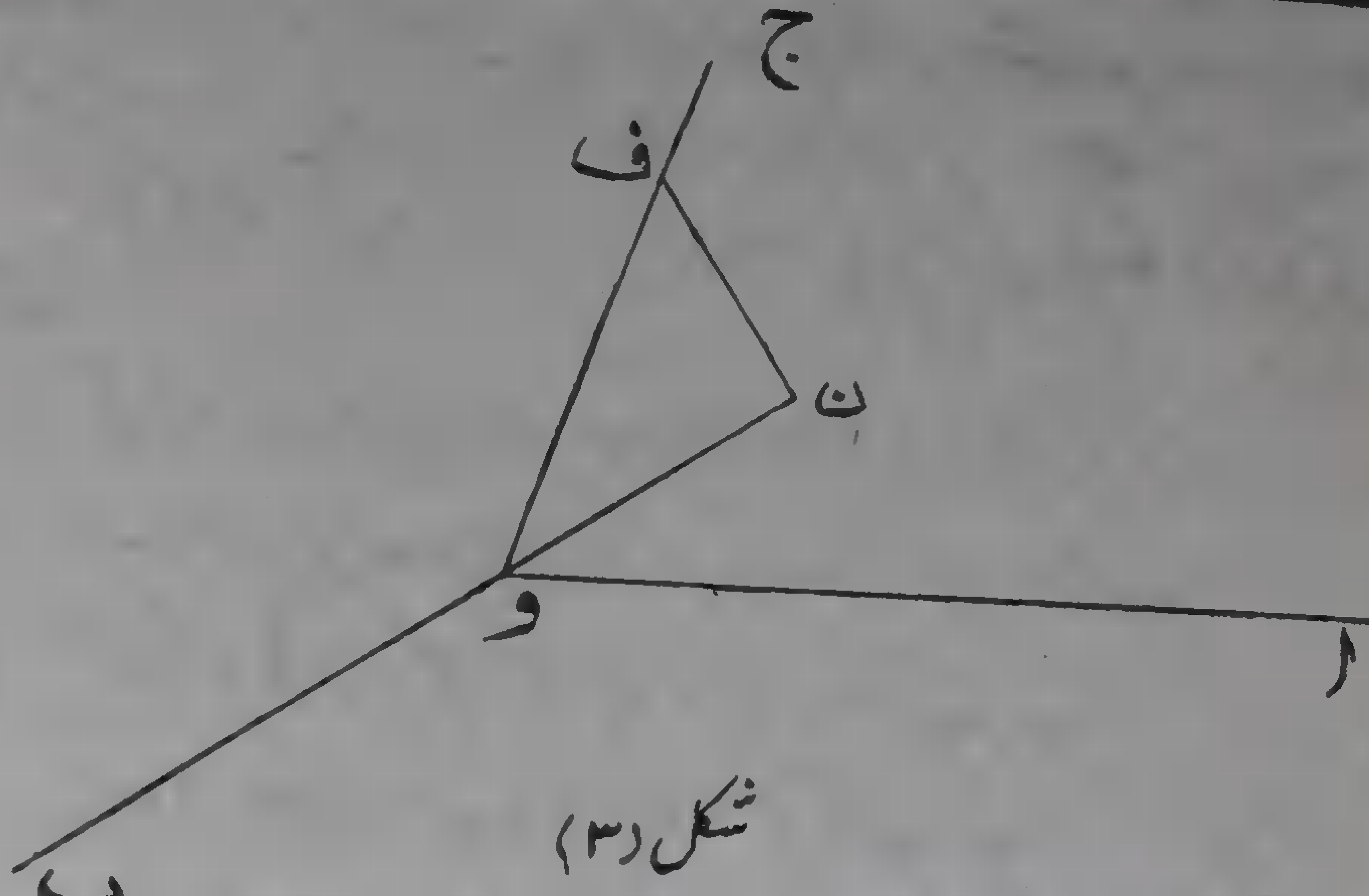
(37)



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

(38) اب دفعہ ۱۸ میں بیان کردہ ظِلوں کے اساسی مسئلہ کی رو سے وف کا ظِل و ا پر = ون کا ظِل و ا پر + ن ف کا ظِل و ا پر، یا

وف جم (ا + ب) = ون جم ا + ن ف جم (ا + ۹۰°)

= وف جم ا جم ب + وف جب ب جم (ا + ۹۰°)،

اس لئے جم (ا + ب) = جم ا جم ب − جب ا جب ب . . . . . (۱)

اگر مثلث ون ف کے ضلعوں کے ظِل و ا پر لینے کی بجائے اُنکے ظِل اُس خط پر لئے جائیں جو و ا کے ساتھ ۹۰° کا زاویہ بناتا ہے تو

وف جب (ا + ب) = ون جب ا + ن ف جب (ا + ۹۰°)

= وف جب ا جم ب + وف جب ب جم (ا + ۹۰°)،

اس لئے جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جم ب . . . . . (۲)

اس طرح ضوابط (۱) اور (۲) مثبت اور منفی تمام مقداروں کے زاویوں

کے لئے ثابت ہو چکے۔ زاویوں ا اور ب کی مختلف مقداروں کے لئے طالب علم کو مناسب شکل بنانی چاہیئے تاکہ خود اس کو ثبوت کی عمومیت کا یقین ہو جائے۔
اگر ہم ضابطوں (۱) اور (۲) میں سے ہر ایک میں ب کو ۔ ب میں بدل دیں تو

جم (ا ۔ ب) = جم ا جم (۔ ب) ۔ جب ا جب (۔ ب)

اور جب (ا ۔ ب) = جب ا جم (۔ ب) + جم ا جب (۔ ب)

پس جم (ا ۔ ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب، ... ... (۳)

جب (ا ۔ ب) = جب ا جم ب ۔ جم ا جب ب، ... ... (۴)

یہ ضابطے (۳) اور (۴) بلا واسطہ اس طرح بھی حاصل کئے جا سکتے ہیں کہ شکل میں زاویہ ب منفی سمت میں بنایا جائے، تب زاویہ ف و ا، ا ۔ ب کے مساوی ہوگا۔

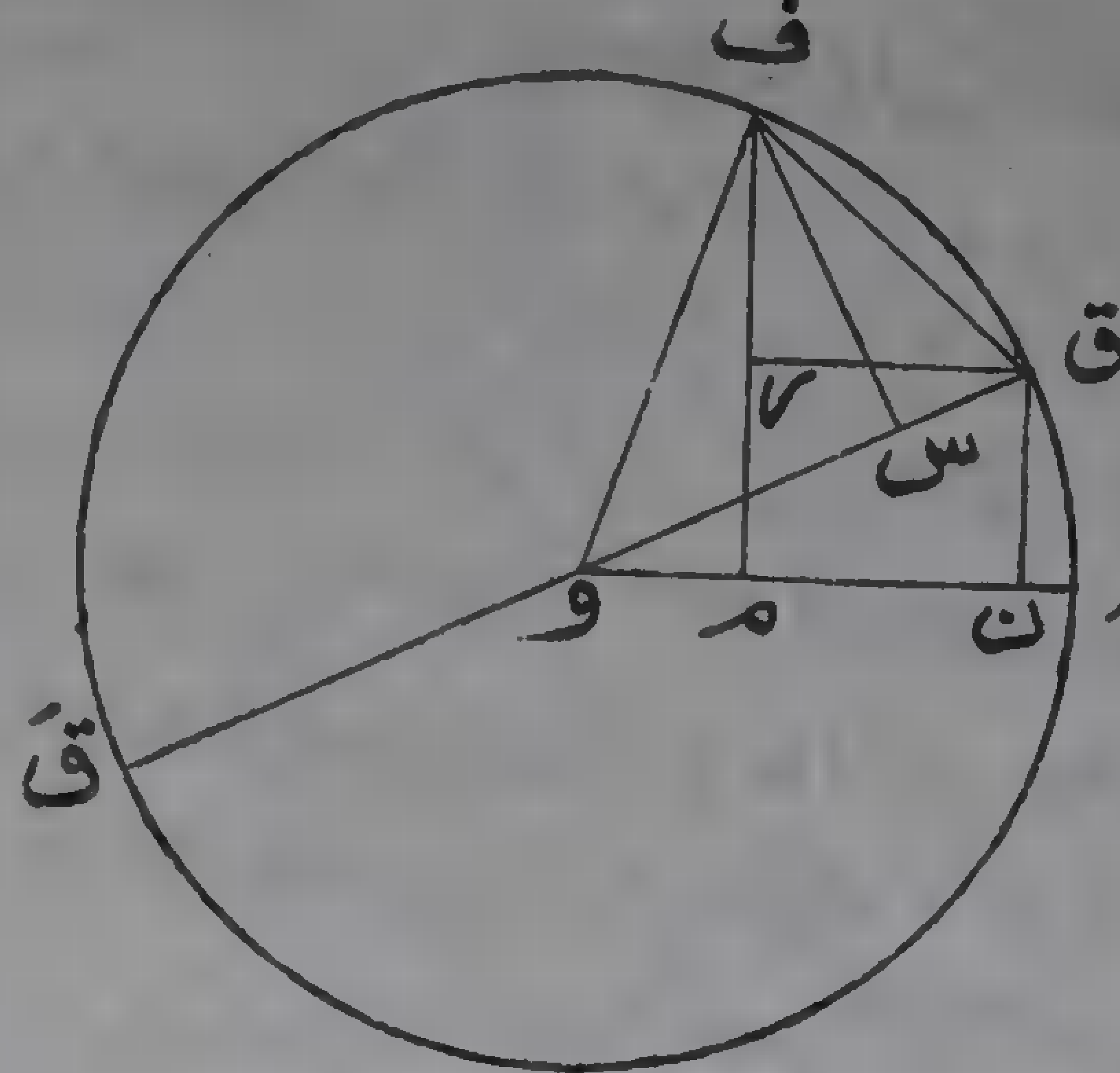
۴۰۔ ضابطوں (۱)، (۲) اور (۳)، (۴) کو علی الترتیب جمع اور تفریق کے ضابطے کہتے ہیں، ضابطوں (۱) اور (۲) میں سے کسی ایک کو دوسرے سے اخذ کیا جا سکتا ہے، (۱) میں ا کی بجائے ا + °۹۰ لکھو تو

جم (°۹۰ + ا + ب) = جم (°۹۰ + ا) جم ب ۔ جب (°۹۰ + ا) جب ب،

یا ۔ جب (ا + ب) = ۔ جب ا جم ب ۔ جم ا جب ب؛

اور اس مساوات کی طرفین میں علامتیں بدلنے سے ضابطہ (۲) حاصل ہوتا ہے اسی طرح (۲) میں ا کی بجائے ا + °۹۰ لکھ کر (۱) کو حاصل کیا جا سکتا ہے پس یہ نتیجہ نکلا کہ یہ چاروں اساسی ضابطے فی الحقیقت ان میں سے کسی ایک میں شامل ہیں۔

۴۱۔ کوشی نے جمع اور تفریق کے ضابطوں کا جو ثبوت دیا ہے وہ حسب ذیل ہے (39)
و کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ نیم قطر و ف اور و ق، و ا کے ساتھ علی الترتیب زاویے ا اور ب بناتے ہیں، ف ق کو ملاؤ، اور و ا پر ف م، ق ن



عمود نکالو، اور ق ر، و ا کے متوازی کھینچو تو

ف ق^{٢} = ق ر^{٢} + ر ف^{٢}

= (و ن - و م)^{٢} + (ف م - ق ن)^{٢}

= و ا^{٢} {(جم ب - جم ا)^{٢} + (جب ا - جب ب)^{٢} }

= ٢ و ا^{٢} (١ - جم ا جم ب - جب ا جب ب)

فرض کرو کہ قطر ق قَ پر عمود ف س کھینچا گیا ہے تو

ف ق^{٢} = ق س × ق قَ = ٢ و ا (و ا - و س)

= ٢ و ا^{٢} {١ - جم (ا - ب)}،

اس لئے جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب، ......(٣)

اب دوسرے ضابطے اس سے اخذ کئے جا سکتے ہیں، چنانچہ ب کو - ب میں بدلنے سے ضابطہ (١) حاصل ہوتا ہے، ب کو ٩٠° - ب میں بدلنے سے ضابطہ (٢)، ب کو ٩٠° + ب میں بدلنے سے ضابطہ (٤)۔

۴۲ - اوپر کے دو ثبوت جو ہم نے جمع اور تفریق کے اساسی ضابطوں کے لئے دئے ہیں بالکل عام ہیں، ان کے علاوہ دوسرے اور ثبوت دئے

جاتے ہیں جن میں سے بعض صرف اُن زاویوں پر اطلاق پذیر ہوتے ہیں جو قیمتوں کی ایک محدود وسعت کے درمیان واقع ہوں اور اس لئے اُنکی توسیع اُن صورتوں میں کرنی پڑتی ہے جب زاویوں کی مقداریں اِس وسعت کے باہر ہوں۔ ہم اِس قسم کی توسیع پہلے ایسے ضابطوں کے لئے کریں گے جو ا اور ب کی صفر اور ۹۰° کے درمیان قیمتیں لیکر ثابت کئے گئے ہیں۔ ا اور ب خواہ کچھ ہی ہوں زاویوں اَ اور بَ کا معلوم کرنا ہمیشہ
(40) ممکن ہے جو صفر اور ۹۰° کے درمیان ہوں ایسے کہ ا = م × ۹۰° + اَ ، ب = ن × ۹۰° + بَ جن میں م اور ن مثبت یا منفی صحیح عدد ہیں، تب

$$جم (ا + ب) = جم (\overline{م + ن}\ ۹۰° + اَ + بَ)$$

(۱) اگر م اور ن دونوں جفت ہوں تو

$$جم (ا + ب) = (-۱)^{\frac{م+ن}{۲}} جم (اَ + بَ)$$

$$= (-۱)^{\frac{م+ن}{۲}} (جم اَ جم بَ - جب اَ جب بَ)$$

اب $جم ا = (-۱)^{\frac{م}{۲}} جم اَ$ ، $جب ا = (-۱)^{\frac{م}{۲}} جب اَ$

اور ب کے لئے بھی اسی وضع کے ضابطے۔

پس $جم (ا + ب) = جم ا جم ب - جب ا جب ب$

(۲)۔ اگر م اور ن دونوں طاق ہوں تو

$$جم (ا) = (-۱)^{\frac{م-۱}{۲}} جم (۹۰° + اَ) = (-۱)^{\frac{م+۱}{۲}} جب اَ ،$$

$$جب ا = (-۱)^{\frac{م-۱}{۲}} جب (۹۰° + اَ) = (-۱)^{\frac{م-۱}{۲}} جم اَ ،$$

اور ب کے لئے بھی اسی وضع کے ضابطے۔ پس جم اَ، جم بَ، جب اَ جب بَ کی قیمتیں درج کرنے سے ہمیں حسب سابق جم (ا + ب) کے لئے وہی ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔

(۳) اگر م طاق ہو اور ن جفت تو

$$\text{جم}(\text{ا}+\text{ب}) = (-1)^{\frac{\text{م}+\text{ن}-1}{2}}\ \text{جم}(90^\circ+\bar{\text{ا}}+\bar{\text{ب}})$$

$$= (-1)^{\frac{\text{م}+\text{ن}+1}{2}}\ \text{جب}(\bar{\text{ا}}+\bar{\text{ب}})$$

$$= (-1)^{\frac{\text{م}+\text{ن}+1}{2}}\ (\text{جب}\,\bar{\text{ا}}\ \text{جم}\,\bar{\text{ب}} + \text{جم}\,\bar{\text{ا}}\ \text{جب}\,\bar{\text{ب}})$$

لیکن $\text{جم}\,\text{ا} = (-1)^{\frac{\text{م}+1}{2}}\ \text{جب}\,\bar{\text{ا}}$ ، $\text{جم}\,\text{ب} = (-1)^{\frac{\text{ن}}{2}}\ \text{جم}\,\bar{\text{ب}}$ ،

$\text{جب}\,\text{ا} = (-1)^{\frac{\text{م}-1}{2}}\ \text{جم}\,\bar{\text{ا}}$ ، $\text{جب}\,\text{ب} = (-1)^{\frac{\text{ن}}{2}}\ \text{جب}\,\bar{\text{ب}}$ ،

اس لئے حسب سابق اندراج کرنے سے ، جم (ا + ب) کے لئے وہی ضابطہ حاصل ہوتا ہے ۔ دوسرے ضابطوں کی توسیع بھی اسی طرح عمل میں آسکتی ہے۔

۴۲ ۔ جمع کے ضابطے جس شکل میں یونانیوں[1] کو معلوم تھے وہ ٹولمی کا مسئلہ ہے جو اقلیدس مقالہ ششم مسئلہ (۵۰) میں مذکور ہے ، یہ مسئلہ یہ ہے کہ اگر ا ب ج د ایک چار ضلعی ہو جو ایک دائرے کے اندر بنایا گیا ہے تو ا ب × ج د + ا د × ب ج = ا ج × ب د ۔ کوئی وتر ا ب اس زاویہ کے نصف کی جیب ہوتا ہے جو دائرے کے مرکز پر ا ب کے محاذی بنایا گیا ہو جبکہ دائرہ کا قطر اکائی تسلیم کیا جائے ، یہ نصف زاویہ وہ زاویہ (41) ہے جو قوس ا ب کے محاذی محیط کے کسی نقطہ پر بنتا ہے ۔ ہم اب یہ بتائیں گے کہ جب (ع ± ہ) اور جم (ع ± ہ) کے ضابطے ٹولمی کے مسئلہ میں شامل ہیں ۔

(۱) فرض کرو کہ ب د ، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ا د ب = ع ، ب د ج = ہ ، تب ا ب د = $\frac{1}{2}\pi$ − ع ، د ب ج = $\frac{1}{2}\pi$ − ہ ،

[1] دیکھو انسائکلوپیڈیا بریٹانیکا (اشاعت نہم) میں مضمون "ٹولمی"۔

ا ج = جب (عہ + بہ)، ا ب = جب عہ، اور ج د = جم بہ؛ اس طرح مسئلہ بالا ضابطہ

جب (عہ + بہ) = جب عہ جم بہ + جم عہ جب بہ

کے مماثل ہے۔

(۲) فرض کرو کہ ج د، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ب ج د = عہ، ا ج د = بہ، تو ا ب = جب (عہ - بہ) اور مسئلہ بالا ضابطہ

جب (عہ - بہ) + جب بہ جم عہ = جم بہ جب عہ

کے مماثل ہے۔

(۳) فرض کرو کہ ب د، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ا د ب = عہ، زاویہ ج ب د = بہ، تو ا د ج = $\frac{1}{2}\pi$ + عہ - بہ، اس طرح ا ج = جم (عہ - بہ) اور مسئلہ بالا ضابطہ

جم (عہ - بہ) = جم عہ جم بہ + جب عہ جب بہ

کے مماثل ہے۔

(۴) فرض کرو کہ ج د، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ب ج د = عہ، ا د ج = بہ، تب ب ج ا = عہ + بہ - $\frac{1}{2}\pi$، ا ب = -جم (عہ + بہ) اور مسئلہ بالا ضابطہ

- جم (عہ + بہ) + جم عہ جم بہ = جب عہ جب بہ

کے مماثل ہے۔

مثال:- مسائل ذیل کے ثبوت میں ٹولمی کا مسئلہ استعمال کرو:-

جب عہ جب (بہ - جہ) + جب بہ جب (جہ - عہ) + جب جہ جب (عہ - بہ) = ۰

جب (عہ + بہ) جب (بہ + جہ) = جب عہ جب جہ + جب بہ جب (عہ + بہ + جہ)

دو جیوب یا دو جیوب التمام کے مجموعہ یا فرق کے لئے ضابطے

۴۴- جمع اور تفریق کے ضابطوں سے ہم فوراً حاصل کرتے ہیں

جب (ا + ب) + جب (ا - ب) = ۲ جب ا جم ب،

جب (ا + ب) - جب (ا - ب) = ۲ جم ا جب ب،

جم (ا + ب) + جم (ا - ب) = ۲ جم ا جم ب

جم (ا - ب) - جم (ا + ب) = ۲ جب ا جب ب

فرض کرو ا + ب = ج، ا - ب = د، تو چونکہ ا = ½ (ج + د) اور ب = ½ (ج - د)، اس لئے حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔

جب ج + جب د = ۲ جب ½ (ج + د) جم ½ (ج - د) ... (۵)

جب ج - جب د = ۲ جم ½ (ج + د) جب ½ (ج - د) ... (۶)

جم ج + جم د = ۲ جم ½ (ج + د) جم ½ (ج - د) ... (۷)

جم د - جم ج = ۲ جب ½ (ج + د) جب ½ (ج - د) ... (۸)

(42) یہ اہم ضابطے (۵)، (۶)، (۷)، (۸) دو زاویوں کی جیوب یا جیوب التمام کے مجموعہ یا فرق کو دو دائری تفاعلوں کے حاصل ضرب کے طور پر بیان کرتے ہیں، ان کو الفاظ میں یوں بیان کیا جا سکتا ہے:-

دو زاویوں کی جیوب کا مجموعہ، ان زاویوں کے نصف مجموعہ کی جیب اور نصف فرق کی جیب التمام کے حاصل ضرب کا دوچند ہوتا ہے۔

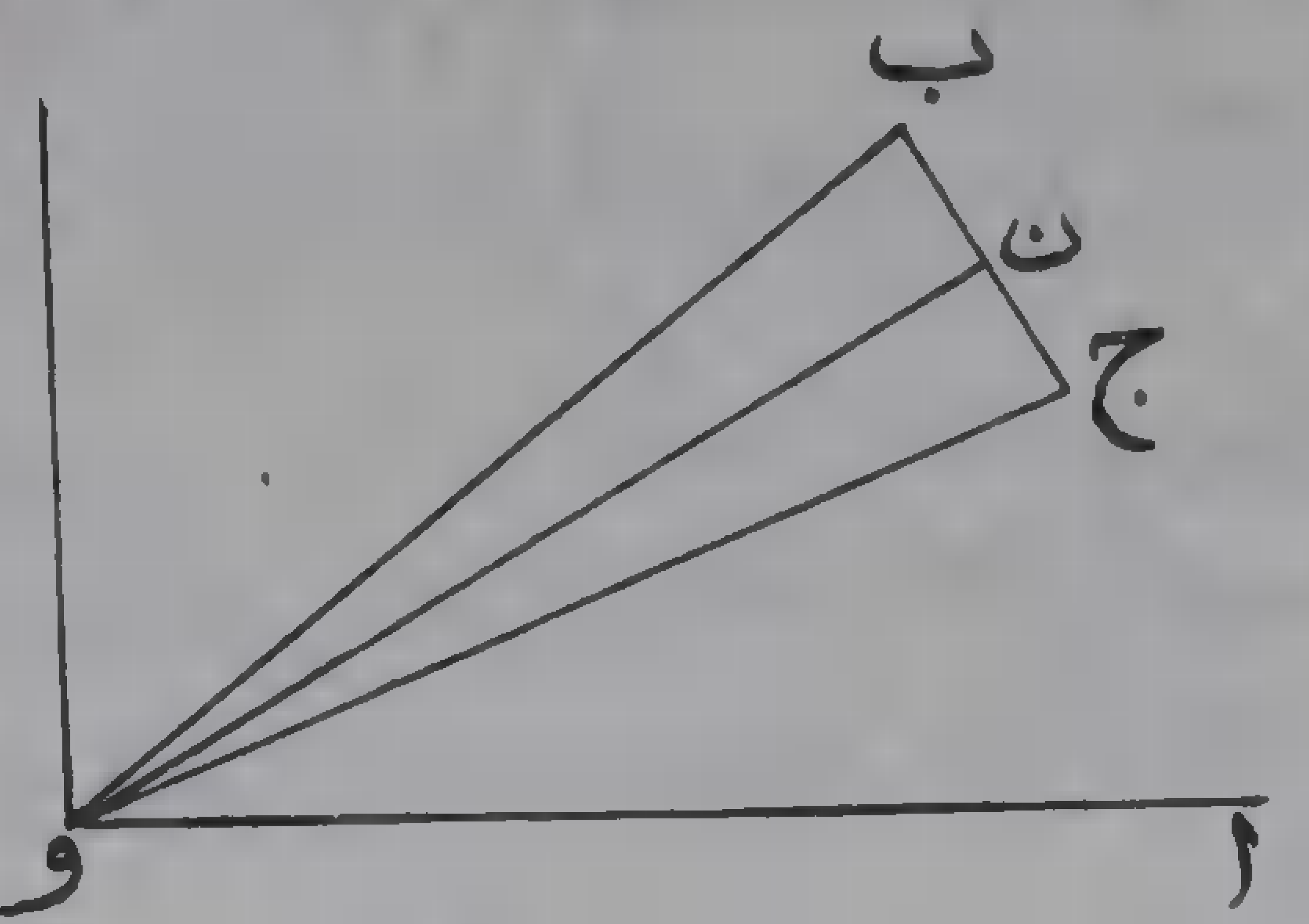
دو زاویوں کی جیوب کا فرق، ان زاویوں کے نصف مجموعہ کی جیب التمام اور نصف فرق کی جیب کے حاصل ضرب کا دوچند ہوتا ہے۔

دو زاویوں کی جیوب التمام کا مجموعہ، ان زاویوں کے

نصف مجموعہ کی جیب التمام اور نصف فرق کی جیب التمام کے حاصل ضرب کا دوچند ہوتا ہے۔

دو زاویوں کی جیوب التمام کا فرق، اِن زاویوں کے نصف مجموعہ کی جیب اور اُلٹے نصف فرق کی جیب کے دوچند حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

۴۵ — یہ ضابطے ہندسی طور پر ظِلوں کے طریقہ سے ثابت کئے جاسکتے ہیں۔



فرض کرو کہ ب و ا = ج، ج و ا = د، اور فرض کرو کہ و ب = و ج، ب ج پر عمود و ن کھینچو تو ن، ب ج کا نقطہ وسطی ہے، نیز

ن و ا = ½ (ج + د)، ن و ب = ن و ج = ½ (ج - د)

اب و ا پر و ب اور و ج کے ظِلوں کا مجموعہ، و ا پر و ن، ن ب، و ن اور ن ج کے ظِلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے اور چونکہ ن ب اور ن ج کے ظِل مساوی اور مختلف العلامت ہیں اس لئے یہ مجموعہ و ن کے ظِل کے دوچند کے مساوی ہے۔ اس لئے

و ب جم ج + و ج جم د = ۲ و ن جم ½ (ج + د)

اور چونکہ

ون = وب جم ½ (ج - د)

اس لئے ضابطہ

(43) جم ج + جم د = ۲ جم ½ (ج + د) جم ½ (ج - د) ... ... (۷)

حاصل ہوتا ہے۔

اگر و ا پر ظل لینے کی بجائے اسکے علی القوائم خط پر ظل لئے جائیں تو

وب جب ج + وج جب د = ۲ ون جب ½ (ج + د)

اس لئے

جب ج + جب د = ۲ جب ½ (ج + د) جم ½ (ج - د) ... (۵)

نیز و ا پر وج کا ظل = وب کا ظل + ب ن کے ظل کا دوچند

یعنے

وج جم د = وب جم ج + ۲ ب ن جب ½ (ج + د)

اس لئے جم د - جم ج = ۲ جب ½ (ج + د) جب ½ (ج - د) ... (۸)

اور اگر ہم و ا پر کے عمود پر ظل لیں تو

وج جب د = وب جب ج - ۲ ب ن جم ½ (ج + د) ... (۷)

یا جب ج - جب د = ۲ جب ½ (ج - د) جم ½ (ج + د) .... (۶)

لوکارتموں کی ایجاد سے قبل تقریباً ایک صدی تک عددوں کو، جیوب کی جدولوں کے ذریعہ ضرب دینے کا ایک عجیب طریقہ رائج تھا۔ یہ طریقہ ضابطہ

جب ا جب ب = ½ {جم (ا - ب) - جم (ا + ب)}

کے استعمال پر منحصر تھا۔ زاویئے ا اور ب جن کی جیوب، علامت اعشاریہ کو نکال دینے کے بعد، اُن اعداد کے مساوی ہوتے ہیں جن کو ضرب دینا مقصود ہوتا ہے جیوب کی ایک جدول سے معلوم کئے جاسکتے ہیں اور پھر اسی جدول سے جم (ا + ب)، جم (ا - ب) معلوم ہوسکتی ہیں، ان آخری جیوب التمام کے فرق کا نصف مطلوبہ

حاصل ضرب ہے۔ اس طریقہ کو προσθαφαιρεσις کہتے تھے گلیشر کے ایک مضمون "On multiplication by a table of single entry" میں جو فلاسیفکل میگزین بابتہ ۱۸۷۸ء میں شائع ہوا تھا اس طریقہ کا ذکر ملے گا۔

امثلہ

۱۔ ثابت کرو کہ

جب ا جب (ب - ج) جب (ب + ج - ا) + جب ب جب (ج - ا) ×

جب (ج + ا - ب) + جب ج جب (ا - ب) جب (ا + ب - ج)

= ۲ جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب)

دائیں جانب کی دوسری اور تیسری ارقام لکھی جاسکتی ہیں

۱/۲ جب ب {جم (ب - ۲ ا) - جم (۲ ج - ب)} + ۱/۲ جب ج {جم (ج - ۲ ب) -

جم (۲ ا - ج)}

اور یہ = ۱/۴ {جب ۲ (ب - ا) + جب ۲ ا - جب ۲ ج - جب ۲ (ب - ج)}

+ ۱/۴ {جب ۲ (ج - ب) + جب ۲ ب - جب ۲ ا - جب ۲ (ج - ا)}

= ۱/۴ (جب ۲ ب - جب ۲ ج) - ۱/۲ جب ۲ (ب - ج) + ۱/۴ {جب ۲ (ب - ا) - جب ۲ (ج - ا)}

= جب (ب - ج) {۱/۲ جم (ب + ج) - جم (ب - ج) + ۱/۲ جم (ب + ج - ۲ ا)}

جو = جب (ب - ج) {جم ا جم (ب + ج - ا) - جم (ب - ج)}؛

اس میں رقم جب ا جب (ب - ج) جب (ب + ج - ا) جمع کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

جب (ب - ج) {جم (ب + ج - ۲ ا) - جم (ب - ج)}

یعنی ۲ جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب)

(۲) ــ ثابت کرو کہ

Σ جم ا جب (ب - ج) جب (ب + ج - ا) (44)

= ۲ جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب)

اسکو مثال (۱) سے ا، ب، ج کو ۹۰° - ا، ۹۰° - ب، ۹۰° - ج میں تبدیل کرکے اخذ کیا جا سکتا ہے، یا بلا واسطہ مثال (۱) کی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے۔

متماثلات ذیل ثابت کرو:

(۳) Σ جب ا جب (ب - ج) = ۰، Σ جم ا جب (ب - ج) = ۰

(۴) Σ جب (ب + ج) جب (ب - ج) = ۰، Σ جم (ب + ج) جب (ب - ج) = ۰

(۵) Σ جب ب جب ج جب (ب - ج) = - جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب)

Σ جم ب جم ج جم (ب - ج) = - جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب)

(۶) اگر ا + ب + ج = π تو ثابت کرو کہ

جب² ا = جب² ب + جب² ج - ۲ جب ب جب ج جم ا

اور جم² ا = ۱ - جم² ب - جم² ج - ۲ جم ا جم ب جم ج

مثلثی متماثلات کی ایک کثیر تعداد اسی طرح کے جبری متماثلات کے مماثل ہے[۱]

مثلاً حسب ذیل جبری متماثلات مثالوں (۱) تا (۵) کے جواب میں ہیں:—

Σ ا (ب - ج) (ب + ج - ا) = ۲ (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب)

(۱) اور (۲) کے جواب میں،

Σ ا (ب - ج) = ۰، (۳) کے جواب میں؛

Σ (ب + ج) (ب - ج) = ۰، (۴) کے جواب میں؛

Σ ب ج (ب - ج) = - (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب)، (۵) کے جواب میں

---

[۱] ایسی مطابقات کی ایک کثیر تعداد ایم۔گیلن (M. Gelin) نے "Mathesis" جلد دوم میں دی ہے۔

ہم ان مطابقات کا نظریہ ساتویں باب میں بیان کریں گے۔

مماس اور مماس التمام کے لئے جمع اور تفریق کی ضابطے

۴۶ - جیب اور جیب التمام کے جمع اور تفریق کے ضابطوں سے ہم دو زاویوں کے مجموعہ یا فرق کے مماس یا مماس التمام کے لیئے ان زاویوں کے مماس یا مماس التمام کی رقوم میں ضابطے اخذ کر سکتے ہیں۔ مثلاً

$$\text{مس}(\text{ا} \pm \text{ب}) = \frac{\text{جب}(\text{ا} \pm \text{ب})}{\text{جم}(\text{ا} \pm \text{ب})} = \frac{\text{جب ا جم ب} \pm \text{جم ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب} \mp \text{جب ا جب ب}} ,$$

پس اس کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما کو جم ا جم ب سے تقسیم کرنے پر

$$\text{مس}(\text{ا} \pm \text{ب}) = \frac{\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} \pm \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}}}{1 \mp \frac{\text{جب ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب}}}$$

اس لئے حسب ذیل دو ضابطے ملتے ہیں

$$\text{مس}(\text{ا} + \text{ب}) = \frac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{1 - \text{مس ا مس ب}} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

$$\text{مس}(\text{ا} - \text{ب}) = \frac{\text{مس ا} - \text{مس ب}}{1 + \text{مس ا مس ب}} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

اسی طرح اور دو ضابطے حاصل ہوتے ہیں (45)

$$\text{مم}(\text{ا} + \text{ب}) = \frac{\text{مم ا مم ب} - 1}{\text{مم ا} + \text{مم ب}} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

$$\text{مم}(\text{ا} - \text{ب}) = \frac{\text{مم ا مم ب} + 1}{\text{مم ب} - \text{مم ا}} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

ضوابط (۹) تا (۱۲) مماس اور مماس التمام کے لئے جمع اور تفریق کے ضابطے ہیں۔

مختلف ضوابط

۴۷ ۔ حسب ذیل ضابطے اُن ضابطوں سے اخذ کئے جا سکتے ہیں جو ہم نے دو زاویوں کے لئے حاصل کئے ہیں۔
یہ ضابطے استحالات کو عمل میں لانے میں اکثر مفید ہوتے ہیں۔
طالب علم کو ہر ضابطہ کی تصدیق خود کرلینی چاہیئے۔

$$\text{جب}(\text{ا}+\text{ب})\,\text{جب}(\text{ا}-\text{ب}) = \text{جب}^2\text{ا} - \text{جب}^2\text{ب} = \text{جم}^2\text{ب} - \text{جم}^2\text{ا} \quad \ldots\ldots (۱۳)$$

$$\text{جم}(\text{ا}+\text{ب})\,\text{جم}(\text{ا}-\text{ب}) = \text{جم}^2\text{ا} - \text{جب}^2\text{ب} = \text{جم}^2\text{ب} - \text{جب}^2\text{ا} \quad \ldots\ldots (۱۴)$$

$$\text{جب}(\text{ا}+\text{ب})\,\text{جم}(\text{ا}-\text{ب}) = \text{جب ا جم ا} + \text{جب ب جم ب} \quad \ldots\ldots (۱۵)$$

$$\text{جم}(\text{ا}+\text{ب})\,\text{جب}(\text{ا}-\text{ب}) = \text{جب ا جم ا} - \text{جب ب جم ب} \quad \ldots\ldots (۱۶)$$

$$\frac{\text{جب}(\text{ا}+\text{ب})}{\text{جب}(\text{ا}-\text{ب})} = \frac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{\text{مس ا} - \text{مس ب}} \quad \ldots\ldots (۱۷)$$

$$\frac{\text{جم}(\text{ا}+\text{ب})}{\text{جم}(\text{ا}-\text{ب})} = \frac{۱ - \text{مس ا مس ب}}{۱ + \text{مس ا مس ب}} \quad \ldots\ldots (۱۸)$$

$$\text{مس ا} \pm \text{مس ب} = \frac{\text{جب}(\text{ا}\pm\text{ب})}{\text{جم ا جم ب}} \quad \ldots\ldots (۱۹)$$

دو جیوب یا جیوب التمام کے جمع اور تفریق کے ضابطوں سے ہمیں فوراً حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں :۔

$$\frac{\text{جب ا} + \text{جب ب}}{\text{جب ا} - \text{جب ب}} = \frac{\text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})}{\text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})} \quad (۲۰)$$

$$\frac{\text{جب ا} \pm \text{جب ب}}{\text{جم ا} + \text{جم ب}} = \text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}\pm\text{ب}) \quad (۲۱)$$

(جب ا ± جب ب) / (جم ب - جم ا) = مم $\frac{1}{2}$ (ا ∓ ب) ...... (۲۲)

(جم ا + جم ب) / (جم ب - جم ا) = مم $\frac{1}{2}$ (ا + ب) مم $\frac{1}{2}$ (ا - ب) ...... (۲۳)

مثالیں (46)

۱۔ ثابت کرو کہ

ا - جم^{۲} ا - جم^{۲} ب - جم^{۲} ج + ۲ جم ا جم ب جم ج

= ۴ جب $\frac{1}{2}$ (ا + ب + ج) جب $\frac{1}{2}$ (- ا + ب + ج) جب $\frac{1}{2}$ (ا - ب + ج) ×

جب $\frac{1}{2}$ (ا + ب + ج)

دائیں جانب کا جملہ لکھا جا سکتا ہے

= جم^{۲} ا - جم (ب + ج) جم (ب - ج) + جم ا {جم (ب + ج) + جم (ب - ج)}

جو مساوی ہے {جم ا - جم (ب + ج)} {جم (ب - ج) - جم ا} کے۔

اب ان میں سے ہر جزو ضربی کو دو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے سے بائیں جانب کا جملہ حاصل ہوتا ہے۔ اگر ± ا ± ب ± ج، ۲ π کا ضعف ہو تو

ا - جم^{۲} ا - جم^{۲} ب - جم^{۲} ج + ۲ جم ا جم ب جم ج = ۰

یہ نتیجہ بعض اوقات مفید ثابت ہوتا ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ

ا - جم^{۲} ا - جم^{۲} ب - جم^{۲} ج - ۲ جم ا جم ب جم ج

= - ۴ جم $\frac{1}{2}$ (ا + ب + ج) جم $\frac{1}{2}$ (- ا + ب + ج) جم $\frac{1}{2}$ (ا - ب + ج) جم $\frac{1}{2}$ (ا + ب - ج)

اس کو (۱) سے اخذ کیا جا سکتا ہے، یا بلا واسطہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ اگر ا + ب + ج = ن π تو

جب ۲ ا + جب ۲ ب + جب ۲ ج = (-۱)$^{ن-۱}$ ۴ جب ا جب ب جب ج

کیونکہ

جب ۲ ا + جب ۲ ب + جب ۲ ج = ۲ جب ا جم ا + ۲ جب (ن π - ا) جم (ب - ج)

= ۲ جب ا {(−۱)^ن جم (ب + ج) − (−۱)^ن جم (ب − ج)} ،

= (−۱)^(ن−۱) ۴ جب ا جب ب جب ج

۴ — انھی مفروض کے مطابق جو مثال (۳) میں فرض کیا گیا ہے ثابت کرو کہ

۱ + جم ۲ ا + جم ۲ ب + جم ۲ ج = (−۱)^ن ۴ جم ا جم ب جم ج

متماثلات ذیل ثابت کرو: —

۵ — جب ۳ ا = ۴ جب ا جب (۶۰° + ا) جب (۶۰° − ا)

۶ — جم ۳ ا = ۴ جم ا جم (۶۰° + ا) جم (۶۰° − ا)

۷ — جب ا + جب ب + جب ج − جب (ا + ب + ج)

= ۴ جب ½ (ب + ج) جب ½ (ج + ا) جب ½ (ا + ب)

۸ — جم ا + جم ب + جم ج + جم (ا + ب + ج)

= ۴ جم ½ (ب + ج) جم ½ (ج + ا) جم ½ (ا + ب)

۹ — Σ جب ۲ ا جب² (ب + ج) − جب ۲ ا جب ۲ ب جب ۲ ج

= ۲ جب (ب + ج) جب (ج + ا) جب (ا + ب)

۱۰ — Σ جم ۲ ا جم² (ب + ج) − جم ۲ ا جم ۲ ب جم ۲ ج

= ۲ جم (ب + ج) جم (ج + ا) جم (ا + ب)

۱۱ — Σ جب² ا جب (ب + ج − ا) − ۲ جب ا جب ب جب ج

= جب (ب + ج − ا) جب (ج + ا − ب) جب (ا + ب − ج)

۱۲ — Σ جم² ا جم (ب + ج − ا) − ۲ جم ا جم ب جم ج

= جم (ب + ج − ا) جم (ج + ا − ب) جم (ا + ب − ج)

(47) مثالیں (۹) اور (۱۰) جبری متماثلہ

Σ ۲ ا (ب + ج)² − ۸ ا ب ج = ۲ (ب + ج)(ج + ا)(ا + ب)

کے جواب میں ہیں اور (۱۱) اور (۱۲) متماثلہ

≡ ا^۲ (ب + ج - ا) - ۲ ا ب ج = (ب + ج - ا) (ج + ا - ب) (ا + ب - ج)

کے جواب میں -

تین زاویوں کے لئے جمع کے ضابطے

۸۴ ---- جمع کے ضابطوں (۱) اور (۲) کی مدد سے ہم تین زاویوں کے حاصل جمع کے دائری تفاعلوں کو ان زاویوں کے تفاعلوں کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں، چنانچہ

جب (ا + ب + ج) = جب (ا + ب) جم ج + جم (ا + ب) جب ج

= (جب ا جم ب + جم ا جب ب) جم ج + (جم ا جم ب - جب ا جب ب) جب ج،

اور جم (ا + ب + ج)

= جم (ا + ب) جم ج - جب (ا + ب) جب ج

= (جم ا جم ب - جب ا جب ب) جم ج - (جب ا جم ب + جم ا جب ب) جب ج،

پس جب (ا + ب + ج)

= جب ا جم ب جم ج + جب ب جم ج جم ا + جب ج جم ا جم ب

- جب ا جب ب جب ج ... ... (۲۴)

اور جم (ا + ب + ج)

= جم ا جم ب جم ج - جم ا جب ب جب ج - جم ب جب ج جب ا

- جم ج جب ا جب ب ... ... (۲۵)

ضابطوں (۲۴) اور (۲۵) کو اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے

جب (ا + ب + ج)

= جم ا جم ب جم ج (مس ا + مس ب + مس ج - مس ا مس ب مس ج)

اور جم (ا + ب + ج)

= جم ا جم ب جم ج (۱ـ مس ب مس ج ـ مس ج مس ا ـ مس ا مس ب)

پس عمل تقسیم سے یہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے

مس (ا + ب + ج)

= (مس ا + مس ب + مس ج ـ مس ا مس ب مس ج) / (۱ ـ مس ب مس ج ـ مس ج مس ا ـ مس ا مس ب)

اسی طرح ضابطہ ذیل بھی حاصل ہوسکتا ہے

مم (ا + ب + ج)

= (مم ا مم ب مم ج ـ مم ا ـ مم ب ـ مم ج) / (مم ب مم ج + مم ج مم ا + مم ا مم ب ـ ۱) (۴۷)

(48)

مثالیں

۱ـ ثابت کرو کہ مس (۴۵° + ا) ـ مس (۴۵° ـ ا) = ۲ مس ۲ ا

۲ـ ثابت کرو کہ اگر ا + ب + ج = ن π تو

مس ا + مس ب + مس ج ـ مس ا مس ب مس ج = ۰

اور اگر ا + ب + ج = (۲م + ۱) π/۲ تو

مس ب مس ج + مس ج مس ا + مس ا مس ب = ۱

اور مماس التمام کے لئے متناظر مسئلے بیان کرو۔

زاویوں کی کسی تعداد کے لئے جمع کے ضابطے

۴۹ ـــ یہ ظاہر ہے کہ اب ہم چار زاویوں کے حاصل جمع کے دائری تفاعلوں کے لئے ضابطے حاصل کرسکتے ہیں، اور پھر پانچ زاویوں کے حاصل جمع کے لئے، اور علیٰ ہذا۔ استقراء کے طریقہ سے ہم ثابت کریں گے کہ ن زاویوں ا۱، ا۲، ا۳، ...، ان کے حاصل جمع کی جیب

اور جیب التمام کے لئے یہ ضابطے ہیں

$$\text{جب}\,(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\cdots+\text{ا}_\text{ن}) = \text{ج}_1-\text{ج}_3+\text{ج}_5-\cdots \qquad (٢٨)$$

$$\text{جم}\,(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\cdots\ \text{ا}_\text{ن}) = \text{ج}_0-\text{ج}_2+\text{ج}_4-\cdots \qquad (٢٩)$$

جہاں $\text{ج}_\text{ر}$ سے ن زاویوں میں سے ر، ر کی جیوب اور باقی ن - ر زاویوں کی جیوب التمام کے حاصل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے اور ن زاویوں میں سے ر زاوئے ہر ممکن طریقہ سے منتخب کئے گئے ہیں، پس

$$\text{ج}_0 = \text{جم}\,\text{ا}_1\,\text{جم}\,\text{ا}_2\cdots\,\text{جم}\,\text{ا}_\text{ن}\,،$$

$$\text{ج}_1 = \text{جب}\,\text{ا}_1\,\text{جم}\,\text{ا}_2\,\text{جم}\,\text{ا}_3\cdots\text{جم}\,\text{ا}_\text{ن} + \text{جم}\,\text{ا}_1\,\text{جب}\,\text{ا}_2\,\text{جم}\,\text{ا}_3\cdots\text{جم}\,\text{ا}_\text{ن}\cdots\,،$$

ضوابط (٢٨) اور (٢٩) صورتوں ن = ٢، ن = ٣ کے لئے ضابطوں (١)، (٢) اور (٢٤)، (٢٥) کے مطابق ہیں، یہ مان لو کہ یہ ضابطے ن زاویوں کے لئے درست ہیں، ہم ثابت کریں گے کہ یہ، (ن + ١) زاویوں کے لیے بھی درست ہیں، اب

$$\text{جب}\,(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\cdots+\text{ا}_\text{ن}+\text{ا}_{\text{ن}+1})$$

$$= \text{جب}\,(\text{ا}_1+\cdots+\text{ا}_\text{ن})\,\text{جم}\,\text{ا}_{\text{ن}+1} + \text{جم}\,(\text{ا}_1+\cdots+\text{ا}_\text{ن})\,\text{جب}\,\text{ا}_{\text{ن}+1}$$

$$= \text{جم}\,\text{ا}_{\text{ن}+1}(\text{ج}_1-\text{ج}_3-\text{ج}_5\cdots) + \text{جب}\,\text{ا}_{\text{ن}+1}(\text{ج}_0-\text{ج}_2+\text{ج}_4\cdots)\,،$$

فرض کروکہ $\text{ج}'_\text{ر}$ سے زاویوں ا_1، ا_2 ... $\text{ا}_{\text{ن}+1}$ میں سے ر، ر زاویوں کی جیوب اور باقی ن + ١ - ر زاویوں کی جیوب التمام کے حاصل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے جبکہ ن + ١ زاویوں میں سے ر زاوئے ہر ممکن طریقہ سے منتخب کئے گئے ہوں۔ تب

$$جَ_۱ = ج_۱ \; جم\, ا_{ن+۱} + ج_۰ \; جب\, ا_{ن+۱}$$

کیونکہ $ج_۱ \; جم\, ا_{ن+۱}$ کی ہر رقم میں زاویوں $ا_۱، ا_۲ \ldots ا_ن$ میں سے ایک کی جیب ہے اور $ج_۰ \; جب\, ا_{ن+۱}$ کی ہر رقم میں صرف جب $ا_{ن+۱}$ ہے۔

(49) اسی طرح

$$جَ_۳ = ج_۳ \; جم\, ا_{ن+۱} + ج_۲ \; جب\, ا_{ن+۱}$$

$$جَ_۵ = ج_۵ \; جم\, ا_{ن+۱} + ج_۴ \; جب\, ا_{ن+۱}$$

" " " " " " " " "

" " " " " " " " "

اس لئے $جب\, (ا_۱ + ا_۲ + \ldots + ا_{ن+۱}) = جَ_۱ - جَ_۳ + جَ_۵ - \ldots$

اسی طرح ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ $جم\, (ا_۱ + \ldots + ا_{ن+۱}) = جَ_۰ - جَ_۲ + جَ_۴ \ldots$

پس اگر ضوابط (۲۸) اور (۲۹)، ن زاویوں کے لئے درست ہیں تو وہ ن + ۱ زاویوں کے لئے بھی درست ہیں، اور یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ وہ، ن = ۲، ۳ کے لئے درست ہیں اس لئے وہ عام طور پر درست ہیں۔

ان ضابطوں کو اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے

$$جب\, (ا_۱ + ا_۲ + \ldots + ا_ن) = جم\, ا_۱ \; جم\, ا_۲ \times \ldots \times جم\, ا_ن \; (م_۱ - م_۳ + م_۵ \ldots)$$

$$جم\, (ا_۱ + ا_۲ + \ldots + ا_ن) = جم\, ا_۱ \; جم\, ا_۲ \ldots جم\, ا_ن \; (۱ - م_۲ + م_۴ - \ldots)،$$

جن میں $م_ر$ سے مس $ا_۱$، مس $ا_۲$ ...، مس $ا_ن$ میں سے ر، ر مماسوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے، اس لئے تقسیم کے عمل سے

$$مس\, (ا_۱ + ا_۲ + \ldots + ا_ن) = \frac{م_۱ - م_۳ + م_۵ - \ldots}{۱ - م_۲ + م_۴ - \ldots} \quad \ldots \ldots (۳۰)$$

جو ن زاویوں کے مجموعہ کے مماس کو ان زاویوں کے مماسوں کی رقوم میں بیان کرتا ہے۔

ضابطہ (۳۰) کو بلا واسطہ بھی ثابت کیا جاسکتا ہے۔ مان لو کہ وہ ن زاویوں کے لئے درست ہے ہم ثابت کریں گے کہ وہ ن + ۱ زاویوں کے لئے بھی درست ہے۔ اس طرح

$$\text{مس}(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\cdots+\text{ا}_{\text{ن}+1})=\frac{\text{مس}(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\cdots+\text{ا}_{\text{ن}})+\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+1}}{1-\text{مس}(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\cdots+\text{ا}_{\text{ن}})\,\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+1}}$$

$$=\frac{(\text{م}_1-\text{م}_3+\text{م}_5-\cdots)+\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+1}(1-\text{م}_2+\text{م}_4-\cdots)}{(1-\text{م}_2+\text{م}_4\cdots)-\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+1}(\text{م}_1-\text{م}_3+\text{م}_5-\cdots)}$$

اب اگر ن + ۱ زاویوں میں سے ر، ر زاویوں کے مماسوں کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع $\text{م}'_{\text{ر}}$ سے تعبیر ہو تو

$$\text{م}'_1=\text{م}_1+\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+1}$$

$$\text{م}'_2=\text{م}_2+\text{م}_1\,\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+1}$$

$$\text{م}'_3=\text{م}_3+\text{م}_2\,\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+1}$$

اس لئے

$$\text{مس}(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\cdots+\text{ا}_{\text{ن}+1})=\frac{\text{م}'_1-\text{م}'_3+\text{م}'_5-\cdots\cdots}{1-\text{م}'_2+\text{م}'_4-\cdots\cdots}$$

اور چونکہ ضابطہ (۳۰)، ن = ۲، ۳ کے لئے درست ہے اس لئے ن = ۴ کے لئے درست ہے اور اس لئے عام طور پر درست ہے۔

جیوب یا جیوب التمام کے حاصل ضرب کو جیوب یا جیوب التمام کے حاصل جمع کے طور پر بیان کرنا (50)

۵۰ — ہم ایسے ضابطے حاصل کر سکتے ہیں جو زاویوں کی کسی تعداد کی جیوب یا جیوب التمام کے حاصل ضرب کو ان زاویوں کی جیوب یا جیوب التمام

کے مجموعہ کے طور پر بیان کریں۔

مثلاً

$$2\,\text{جب}\,\text{ا}_1\,\text{جب}\,\text{ا}_2 = \text{جم}(\text{ا}_1 - \text{ا}_2) - \text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2)$$

$$2^2\,\text{جب}\,\text{ا}_1\,\text{جب}\,\text{ا}_2\,\text{جب}\,\text{ا}_3 = 2\,\text{جب}\,\text{ا}_3\{\text{جم}(\text{ا}_1 - \text{ا}_2) - \text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2)\}$$

$$= \text{جب}(\text{ا}_1 - \text{ا}_2 + \text{ا}_3) + \text{جب}(-\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3)$$

$$+ \text{جب}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 - \text{ا}_3) - \text{جب}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3)$$

$$= \Sigma\,\text{جب}(-\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3) - \text{جب}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3)$$

$$2^3\,\text{جب}\,\text{ا}_1\,\text{جب}\,\text{ا}_2\,\text{جب}\,\text{ا}_3\,\text{جب}\,\text{ا}_4 = 2\,\text{جب}(\text{ا}_1 - \text{ا}_2 + \text{ا}_3)\,\text{جب}\,\text{ا}_4 + \cdots$$

$$- 2\,\text{جب}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3)\,\text{جب}\,\text{ا}_4$$

$$= \text{جم}(\text{ا}_1 - \text{ا}_2 + \text{ا}_3 - \text{ا}_4) - \text{جم}(\text{ا}_1 - \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \text{ا}_4)$$

$$+ \text{جم}(-\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 - \text{ا}_4) - \text{جم}(-\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \text{ا}_4)$$

$$+ \text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 - \text{ا}_3 - \text{ا}_4) - \text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 - \text{ا}_3 + \text{ا}_4)$$

$$- \text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 - \text{ا}_4) + \text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \text{ا}_4)$$

$$= \text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \text{ا}_4) - \Sigma\,\text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 - \text{ا}_4)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\Sigma\,\text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 - \text{ا}_3 - \text{ا}_4)$$

اسی طرح

$$2\,\text{جم}\,\text{ا}_1\,\text{جم}\,\text{ا}_2 = \text{جم}(\text{ا}_1 - \text{ا}_2) + \text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2)$$

$$2^2\,\text{جم}\,\text{ا}_1\,\text{جم}\,\text{ا}_2\,\text{جم}\,\text{ا}_3 = 2\,\text{جم}(\text{ا}_1 - \text{ا}_2)\,\text{جم}\,\text{ا}_3 + 2\,\text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2)\,\text{جم}\,\text{ا}_3$$

$$= \text{جم}(-\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3) + \text{جم}(\text{ا}_1 - \text{ا}_2 + \text{ا}_3)$$

$$+ \text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 - \text{ا}_3) + \text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3)$$

$$= \Sigma\,\text{جم}(-\text{ا}_1+\text{ا}_2+\text{ا}_3) + \text{جم}(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\text{ا}_3)$$

$$2^3\,\text{جم}\,\text{ا}_1\,\text{جم}\,\text{ا}_2\,\text{جم}\,\text{ا}_3\,\text{جم}\,\text{ا}_4 = \Sigma\,\text{جم}(-\text{ا}_1+\text{ا}_2+\text{ا}_3+\text{ا}_4) + \frac{1}{2}\Sigma\,\text{جم}(\text{ا}_1+\text{ا}_2-\text{ا}_3-\text{ا}_4) + \text{جم}(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\text{ا}_3-\text{ا}_4)\text{؛}$$

ن زاویوں کے لئے عام ضابطے یہ ہیں:- اگر ن جفت ہے تو

$$(-1)^{\frac{\text{ن}}{2}}\, 2^{\text{ن}-1}\,\text{جب}\,\text{ا}_1\,\text{جب}\,\text{ا}_2 \ldots \text{جب}\,\text{ا}_\text{ن}$$

$$= \text{ج}_\text{ن} - \text{ج}_{\text{ن}-1} + \text{ج}_{\text{ن}-2} \ldots + (-1)^{\frac{\text{ن}}{2}}\,\frac{1}{2}\,\text{ج}_{\frac{\text{ن}}{2}} \text{،} \ldots\ldots \quad (۳۱)$$

جہاں $\text{ج}_{\text{ن}-\text{ر}}$ وہ حاصل جمع ہے جو زاویوں ا_1، ا_2 ... $\text{ا}_\text{ن}$ میں سے ن-ر/ن-ر (51)
زاویوں کو مثبت اور باقی ر زاویوں کو منفی لیکر ان کے حاصل جمع کی جیوب التمام کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے، ہر اجتماع میں منفی زاویئے لئے گئے ہیں - اگر ن طاق ہے تو

$$(-1)^{\frac{\text{ن}-1}{2}}\, 2^{\text{ن}-1}\,\text{جب}\,\text{ا}_1\,\text{جب}\,\text{ا}_2 \ldots \text{جب}\,\text{ا}_\text{ن}$$

$$= \text{د}_\text{ن} - \text{د}_{\text{ن}-1} + \text{د}_{\text{ن}-2} \ldots + (-1)^{\frac{\text{ن}-1}{2}}\,\text{د}_{\frac{1}{2}(\text{ن}+1)} \ldots\ldots \quad (۳۲)$$

جہاں $\text{د}_{\text{ن}-\text{ر}}$ وہ حاصل جمع ہے جو زاویوں میں سے ن-ر، ن-ر زاویوں کو مثبت اور باقی ر زاویوں کو منفی لیکر ان کے حاصل جمع کی جیوب کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے - اسی طرح اگر ن جفت ہے تو

$$2^{\text{ن}-1}\,\text{جم}\,\text{ا}_1\,\text{جم}\,\text{ا}_2 \ldots \text{جم}\,\text{ا}_\text{ن}$$

$$= \text{ج}_\text{ن} + \text{ج}_{\text{ن}-1} + \text{ج}_{\text{ن}-2} \ldots + \frac{1}{2}\,\text{ج}_{\frac{1}{2}\text{ن}} \text{،} \ldots\ldots \quad (۳۳)$$

اور اگر ن طاق ہے تو

$$2^{\text{ن}-1}\,\text{جم}\,\text{ا}_1\,\text{جم}\,\text{ا}_2\,\text{جم}\,\text{ا}_3 \ldots \text{جم}\,\text{ا}_\text{ن}$$

$$= \text{ج}_{ن} + \text{ج}_{ن-۱} + \cdots + \text{ج}_{\frac{۱}{۲}(ن-۱)} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \qquad (۳۴)$$

ضابطوں (۳۱)، (۳۲)، (۳۳)، (۳۴) کو اوپر ن = ۲، ۳، ۴ کے لئے ثابت کیا جا چکا ہے اور اب ان کو استقراء کے طریقہ سے عام صورت کے لئے ثابت کیا جائے گا، مان لو کہ ضابطہ (۳۱) ن زاویوں کے لئے درست ہے، اس کو ۲ جب ا$_{ن+۱}$ سے ضرب دو اور کسی رقم ۲ ج$_{ن-ر}$ جب ا$_{ن+۱}$ کی بجائے جیوب کا مجموعہ رکھو تو حاصل ضرب

$$(-۱)^{\frac{ن}{۲}}\, ۲^{ن}\, \text{جب ا}_{۱}\, \text{جب ا}_{۲} \ldots \text{جب ا}_{ن}\, \text{جب ا}_{ن+۱}$$

کے لئے حسب ذیل جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{دَ}_{ن+۱} - \text{دَ}_{ن} + \cdots + (-۱)^{\frac{ن}{۲}}\, \text{دَ}_{\frac{۱}{۲}(ن+۲)}$$

جہاں دَ$_{ر}$ وہ حاصل جمع ہے جو ن + ۱ زاویوں میں سے ر، ر زاویوں کو مثبت اور باقی زاویوں کو منفی لیکر ان کے حاصل جمع کی جیوب کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے، پس یہ وہی ہے جو ضابطہ (۳۲) ہو جاتا ہے جبکہ اس میں ن کو ن + ۱ میں بدلا جائے، پھر یہی عمل اس نتیجہ کے ساتھ کرو تو حاصل ضرب

$$(-۱)^{\frac{ن+۱}{۲}}\, ۲^{ن+۱}\, \text{جب ا}_{۱}\, \text{جب ا}_{۲} \ldots \text{جب ا}_{ن+۲}$$

$$= \text{جً}_{ن+۲} - \text{جً}_{ن+۱} + \cdots + (-۱)^{\frac{ن+۲}{۲}}\, \frac{۱}{۲}\, \text{جً}_{\frac{۱}{۲}(ن+۲)}$$

جہاں جً$_{ر}$، ن + ۲ زاویوں کے لحاظ سے ہے، اس طرح ضابطہ (۳۱)، قیمت ن + ۲ کے لئے ثابت ہو چکا اگر ہم قیمت ن کے لئے ضابطوں (۳۱) اور (۳۲) کو درست مان لیں۔ اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ضابطہ (۳۲)، ن + ۲ زاویوں کے لئے درست ہے، اور چونکہ یہ ضابطے ن = ۳، ۴ کے لئے ثابت کئے جا چکے ہیں اس لئے وہ عام صورت

میں بھی درست ہیں۔ جیوب التمام کی کسی تعداد کے حاصل ضربوں کے ضابطے (۳۳) اور (۳۴) اسی طریقہ سے ثابت کئے جا سکتے ہیں۔ (52)

مثال — ثابت کرو کہ ن زاویوں ع، ب، ج، ص، ... کے لئے

$$\Sigma\, \text{جب}\,(\text{ع} \pm \text{ب} \pm \text{ج} \pm \text{ص} \pm \ldots) = ۲^{\text{ن}-۱}\, \text{جب ع جم ب جم ج جم ص} \ldots ,$$

$$\Sigma\, \text{جم}\,(\text{ع} \pm \text{ب} \pm \text{ج} \pm \text{ص} \pm \ldots) = ۲^{\text{ن}-۱}\, \text{جم ع جم ب جم ج جم ص} \ldots ,$$

جہاں Σ سے وہ حاصل جمع تعبیر ہوتا ہے جو علامتوں کی تمام ممکن ترتیبوں کو جو ن-۱ ابہامات کی باعث پیدا ہو سکتی ہیں لینے سے بنتا ہے۔

ضعفی زاویوں کے دائری تفاعلوں کے لئے ضوابط

۵۱ — جمع کے ضابطوں میں جو ہم نے دو یا دو سے زیادہ زاویوں کے لئے حاصل کئے ہیں ہر زاویہ کو ا کے مساوی فرض کریں تو حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں:—

$$\text{جب}\ ۲\text{ا} = ۲\ \text{جب ا جم ا}, \quad \ldots\ldots (۳۵)$$

$$\text{جم}\ ۲\text{ا} = \text{جم}^{۲}\text{ا} - \text{جب}^{۲}\text{ا} = ۱ - ۲\,\text{جب}^{۲}\text{ا} = ۲\,\text{جم}^{۲}\text{ا} - ۱ \quad \ldots (۳۶)$$

$$\text{جب}\ ۳\text{ا} = ۳\ \text{جب ا جم}^{۲}\text{ا} - \text{جب}^{۳}\text{ا}$$

$$\text{یا جب}\ ۳\text{ا} = ۳\ \text{جب ا} - ۴\ \text{جب}^{۳}\text{ا}, \quad \ldots\ldots (۳۷)$$

$$\text{جم}\ ۳\text{ا} = \text{جم}^{۳}\text{ا} - ۳\ \text{جم ا جب}^{۲}\text{ا}$$

$$\text{یا جم}\ ۳\text{ا} = ۴\ \text{جم}^{۳}\text{ا} - ۳\ \text{جم ا}, \quad \ldots\ldots (۳۸)$$

$$\text{جب ن ا} = \text{ن جب ا جم}^{\text{ن}-۱}\text{ا} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{|\underline{۳}}\ \text{جب}^{۳}\text{ا جم}^{\text{ن}-۳}\text{ا} + \ldots \quad (۳۹)$$

$$\text{جم ن ا} = \text{جم}^{\text{ن}}\text{ا} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{|\underline{۲}}\ \text{جب}^{۲}\text{ا جم}^{\text{ن}-۲}\text{ا}$$

$$+\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{\underline{|۴}} \text{ جب}^{۴} ا \text{ جم}^{ن-۴} ا - \ldots \quad (۴۰)$$

یہ آخری ضابطے (۳۹) اور (۴۰)، (۲۸) اور (۲۹) سے حاصل ہوتے ہیں، کیونکہ دفعہ ۹۴ میں ج ر میں اتنی ہی ارقام شامل ہوتی ہیں جتنی تعداد ان اجتماعوں کی ہے جو ن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کو باہم لینے سے حاصل ہوتے ہیں، اور ج ر

$$= \frac{ن(ن-۱) \ldots (ن-ر+۱)}{\underline{|ر}} \text{ جب}^{ر} ا \text{ جم}^{ن-ر} ا$$

ضابطوں (۳۹)، (۴۰) کو اس شکل میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\text{جب ن ا} = \text{جم}^{ن} ا \left\{ ن \text{ مس ا} - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{\underline{|۳}} \text{ مس}^{۳} ا + \ldots \right\}$$

(53) $$\text{جم ن ا} = \text{جم}^{ن} ا \left\{ ۱ - \frac{ن(ن-۱)}{\underline{|۲}} \text{ مس}^{۲} ا + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{\underline{|۴}} \text{ مس}^{۴} ا \ldots \right\}$$

نیز (۹)، (۲۶) اور (۳۰) سے

$$\text{مس ۲ا} = \frac{۲ \text{ مس ا}}{۱ - \text{مس}^{۲} ا} \quad \ldots \ldots \quad (۴۱)$$

$$\text{مس ۳ا} = \frac{۳ \text{ مس ا} - \text{مس}^{۳} ا}{۱ - ۳ \text{ مس}^{۲} ا} \quad \ldots \ldots \quad (۴۲)$$

$$\text{مس ن ا} = \frac{ن \text{ مس ا} - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{\underline{|۳}} \text{ مس}^{۳} ا + \ldots}{۱ - \frac{ن(ن-۱)}{\underline{|۲}} \text{ مس}^{۲} ا + \ldots} \quad \ldots \quad (۴۳)$$

اس طرح ہم نے ایک زاویہ کے ضعف کے دائری تفاعلوں کے لئے خود اس زاویہ کے دائری تفاعلوں کی رقوم میں ضابطے حاصل کئے ہیں۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ تواتروں

جب ا، جب ۲ ا، جب ۳ ا، ....

جم ا، جم ۲ ا، جم ۳ ا، ......

میں سے ہر ایک تواتر متوالی (Recurring) ہے، کیونکہ

جب (ن + ۱) ا = ۲ جم ا جب ن ا − جب (ن − ۱) ا،

جم (ن + ۱) ا = ۲ جم ا جم ن ا − جم (ن − ۱) ا؛

پس ہر ایک تواتر کی ہر رقم اس طرح حاصل ہوتی ہے کہ اس سے ماقبل رقم کو ۲ جم ا سے ضرب دیکر حاصل ضرب میں سے اس ماقبل رقم کی پچھلی رقم کو تفریق کیا جائے اس طریقہ سے تواتروں کی ارقام یکے بعد دیگرے محسوب کیجا سکتی ہیں اگر ہم ضابطہ (۳۵) اور (۳۶) کو مان لیں۔

اس لئے سلسلوں

۱ + لا جب ا + لا^2 جب ۲ ا + ...، اور ۱ + لا جم ا + لا^2 جم ۲ ا + ...

میں سے ہر ایک کے ربط کا پیمانہ یہ ہے

۱ − ۲ لا جم ا + لا^2

جیب یا جیب التمام کی قوتوں کے لئے ضعفی زاویوں کی جیوب یا جیوب التمام کی رقوم میں جملے

۵۲— کسی زاویہ کی جیب یا جیب التمام کی کسی قوت کے لئے خود زاویہ کے ضعفوں کی جیوب یا جیوب التمام کی رقوم میں جملے حاصل کرنے کے لئے دفعہ (۵۰) کے ضابطوں میں تمام زاویوں کو ایک دوسرے کے مساوی رکھنا چاہیئے، اس طرح حسب ذیل ضابطے حاصل ہونگے۔

۲ جب^2 ا = ۱ − جم ۲ ا

۴ جب^3 ا = ۳ جب ا − جب ۳ ا،

۸ جب^4 ا = جم ۴ ا − ۴ جم ۲ ا + ۳

$$۲\,\text{جم}^{۲}\,\text{ا} = ۱ + \text{جم}\,۲\,\text{ا}\text{،}$$

$$۴\,\text{جم}^{۳}\,\text{ا} = ۳\,\text{جم}\,\text{ا} + \text{جم}\,۳\,\text{ا}\text{،}$$

$$۸\,\text{جم}^{۴}\,\text{ا} = \text{جم}\,۴\,\text{ا} + ۴\,\text{جم}\,۲\,\text{ا} + ۳\text{،}$$

(54)

$$(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\,۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{ا} = \text{جم}\,\text{ن}\,\text{ا} - \text{ن}\,\text{جم}(\text{ن}-۲)\,\text{ا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor ۲}\,\text{جم}(\text{ن}-۴)\,\text{ا} - \dots$$

$$+ (-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\,\frac{۱}{۲}\,\frac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \tfrac{۱}{۲}\text{ن}\ \lfloor \tfrac{۱}{۲}\text{ن}}\text{،} \quad \dots \quad (۴۴)$$

(ن جفت)،

$$(-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{ا} = \text{جب}\,\text{ن}\,\text{ا} - \text{ن}\,\text{جب}(\text{ن}-۲)\,\text{ا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor ۲}\,\text{جب}(\text{ن}-۴)\,\text{ا} - \dots$$

$$+ (-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,\frac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \tfrac{۱}{۲}(\text{ن}-۱)\ \lfloor \tfrac{۱}{۲}(\text{ن}+۱)}\,\text{جب}\,\text{ا}\text{،} \quad \dots \quad (۴۵)$$

(ن طاق)،

$$۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{ا} = \text{جم}\,\text{ن}\,\text{ا} + \text{ن}\,\text{جم}(\text{ن}-۲)\,\text{ا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor ۲}\,\text{جم}(\text{ن}-۴)\,\text{ا} + \dots$$

$$+ \frac{۱}{۲}\,\frac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \tfrac{۱}{۲}\text{ن}\ \lfloor \tfrac{۱}{۲}\text{ن}}\text{،} \quad \dots \quad (۴۶)$$

ن (جفت)،

$$۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{ا} = \text{جم}\,\text{ن}\,\text{ا} + \text{ن}\,\text{جم}(\text{ن}-۲)\,\text{ا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor ۲}\,\text{جم}(\text{ن}-۴)\,\text{ا} + \dots$$

$$+ \frac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \tfrac{۱}{۲}(\text{ن}-۱)\ \lfloor \tfrac{۱}{۲}(\text{ن}+۱)}\,\text{جم}\,\text{ا}\text{،} \quad \dots \quad (۴۷)$$

(ن طاق)

ضابطوں (۴۴) اور (۴۵) کو (۴۶)، (۴۷) سے ان میں ا کی بجائے ۹۰° - ا رکھ کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مقلوب تفاعلوں کے درمیان رشتے

۵۳ — اس باب کے جمع کے ضابطوں کے جواب میں وہ ضابطے معلوم کئے جا سکتے ہیں جن میں مقلوب تفاعل شریک ہوں۔ مثلاً ضابطوں (۱) اور (۳) میں جم ا = و، جم ب = ب رکھنے سے ہمیں معلوم ہوگا کہ

$$\text{جم}^{-1}\text{ا} \pm \text{جم}^{-1}\text{ب} = \text{جم}^{-1}\left\{\text{ا ب} \mp \sqrt{1-\text{ا}^2}\,\sqrt{1-\text{ب}^2}\right\}،$$

اسی طرح (۲) اور (۴) سے حاصل ہوگا

$$\text{جب}^{-1}\text{ا} \pm \text{جب}^{-1}\text{ب} = \text{جب}^{-1}\left\{\text{ا}\sqrt{1-\text{ب}^2} \pm \text{ب}\sqrt{1-\text{ا}^2}\right\}$$

(۹)، (۱۰)، (۱۱)، اور (۱۲) سے

$$\text{مس}^{-1}\text{ا} \pm \text{مس}^{-1}\text{ب} = \text{مس}^{-1}\frac{\text{ا} \pm \text{ب}}{1 \mp \text{ا ب}}$$

$$\text{مم}^{-1}\text{ا} \pm \text{مم}^{-1}\text{ب} = \text{مم}^{-1}\frac{\text{ا ب} \mp 1}{\text{ب} \pm \text{ا}}$$

اور (۲۶) اور (۳۰) سے

$$\text{مس}^{-1}\text{ا} + \text{مس}^{-1}\text{ب} + \text{مس}^{-1}\text{ج} = \text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{ا ب ج}}{1 - \text{ب ج} - \text{ج ا} - \text{ا ب}}\right)$$

$$\text{مس}^{-1}\text{ا}_1 + \text{مس}^{-1}\text{ا}_2 + \dots + \text{مس}^{-1}\text{ا}_n = \text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{س}_1 - \text{س}_3 + \text{س}_5 \dots}{1 - \text{س}_2 + \text{س}_4 \dots}\right)، \qquad (55)$$

جہاں $\text{س}_\text{ر}$، مقداروں ا_1، ا_2، ا_3 ...، ان میں سے ر، ر مقداروں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ ان ضابطوں میں، ایک مقلوب تفاعل کے سوا باقی سب مقلوب تفاعلوں کو اختیاری طور پر کوئی مخصوص قیمتیں دی جا سکتی ہیں اور اس ایک مقلوب تفاعل کی مخصوص قیمت کا تعین دوسروں

کی قیمتیں مقرر کرنے کے بعد ہو سکتا ہے۔ مزید براں اگر کسی ضابطہ میں (مثلاً) تین مقلوب تفاعل شامل ہوں اور ان میں سے دو کی صدر قیمتیں دی جائیں تو یہ ضروری نہیں ہے کہ تیسرے مقلوب تفاعل کی قیمت بھی صدر ہو مثلاً ضابطہ

$$\text{مس}^{-1} ا + \text{مس}^{-1} ب = \text{مس}^{-1} (ا + ب) \backslash (۱ - اب)$$

میں اگر مس$^{-1}$ ا اور مس$^{-1}$ ب دونوں مثبت ہوں اور ان کی قیمتیں صدر ہوں یعنی وہ قیمتیں جو صفر اور $\frac{1}{2}$ ؃ کے درمیان ہیں، اور اگر ان کا مجموعہ $\frac{1}{2}$ ؃ سے بڑا ہو تو یہ مجموعہ مقلوب تفاعل

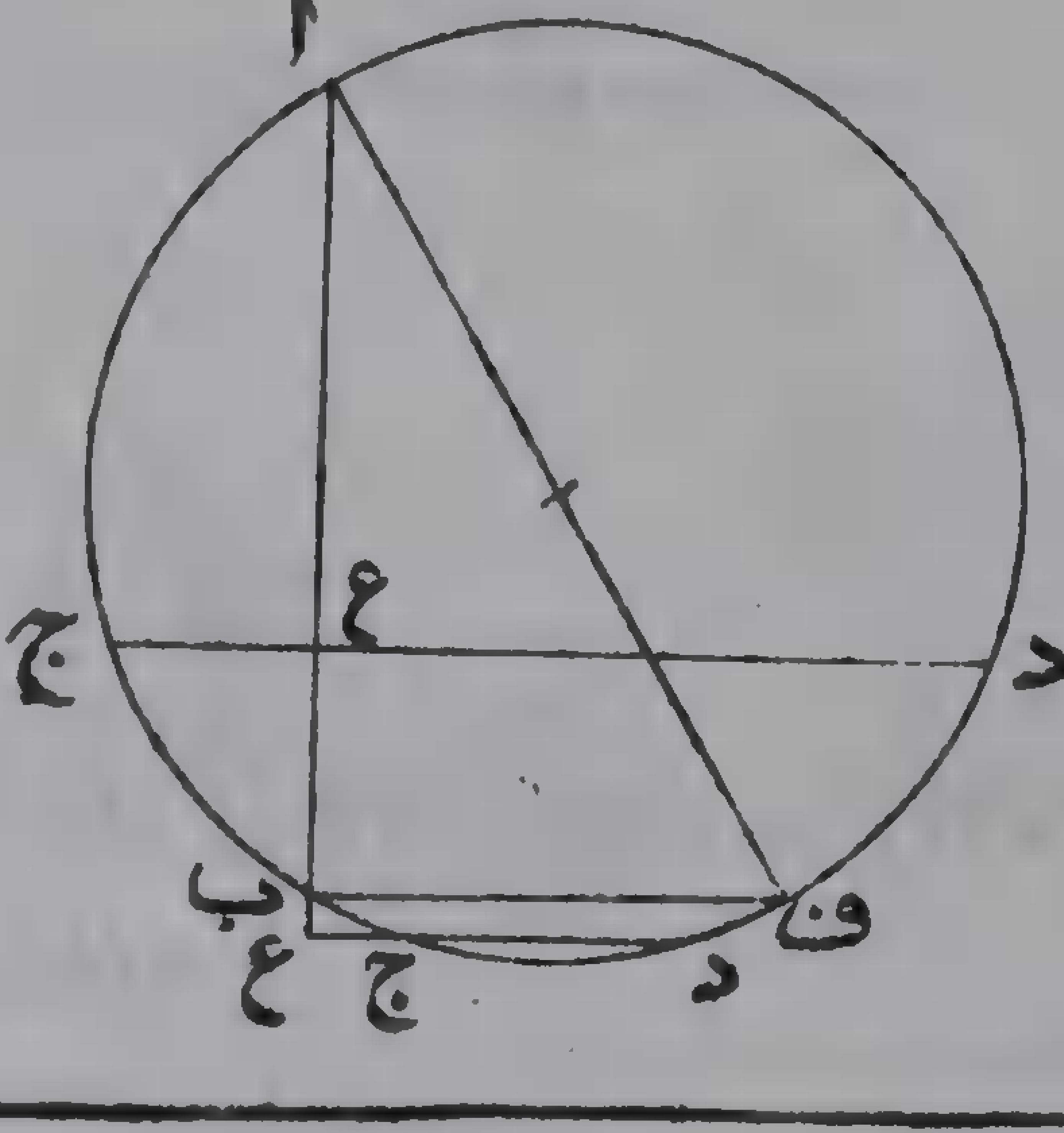
$$\text{مس}^{-1} (ا + ب) \backslash (۱ - اب)$$

کی صدر قیمت نہیں ہے؛ یہ صدر قیمت، صفر اور $-\frac{1}{2}$ ؃ کے درمیان ایک زاویہ ہے جس کا مماس وہی ہے جو مس$^{-1}$ ا اور مس$^{-1}$ ب کا مجموعہ ہے۔

ضابطوں کے ہندسی ثبوت

۵۴ — اس باب کے اکثر ضابطوں کے ہندسی ثبوت دئے جا سکتے ہیں، ایسے ثبوتوں کی صرف تین مثالیں دی جائیں گی۔ یہ یاد رکھنا چاہیئے کہ بالعموم یہ ثبوت زاویوں کی صرف ایک محدود وسعت کے لئے درست ہوتے ہیں۔

(۱) ضابطہ مس (ا ± ب) = $\frac{\text{مس ا} \pm \text{مس ب}}{۱ \mp \text{مس ا مس ب}}$ ثابت کرو۔



فرض کرو کہ ایک دائرے کے دو وتر ا ب، ج د ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں، اور فرض کرو کہ زاویے ا د ع، ب د ع کو ا اور ب سے تعبیر کیا گیا ہے، تو چونکہ (56)

اع × ع ب = ج ع × ع د اس لئے

$$\frac{\frac{\text{اع} \pm \text{ع ب}}{\text{ع د}}}{۱ - \frac{\text{اع}}{\text{ع د}} \times \frac{\text{ع ب}}{\text{ع د}}} = \frac{\text{اع} \pm \text{ع ب}}{\text{ع د} \pm \text{ع ج}} = \frac{\text{اب}}{\text{ب ف}}$$

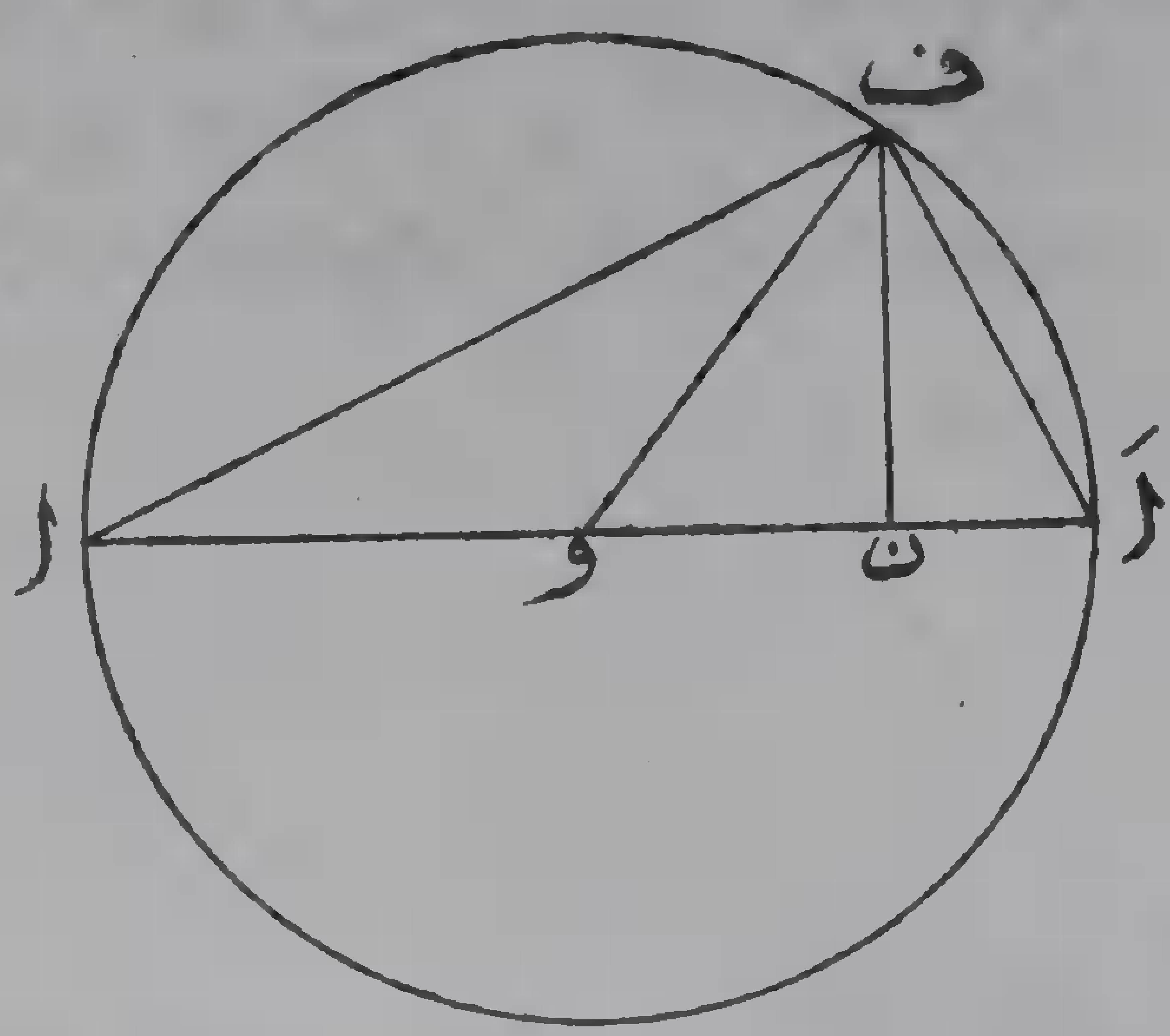
اس لئے

$$\frac{\text{مس ا} \pm \text{مس ب}}{۱ \mp \text{مس ا مس ب}} = \text{مس}(\text{ا} \pm \text{ب})$$

(۲) ضابطہ جب ۲ ا = ۲ جب ا جم ا،

اور جم ۲ ا = $\text{جم}^{۲}$ ا − $\text{جب}^{۲}$ ا

ثابت کرو۔



فرض کرو کہ ا و اَ، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ف ا اَ = ا، تب ف و اَ = ۲ ا، ف ن، ا اَ پر عمود نکالو۔

تب جب ۲ ا = ف ن / و ف ، لیکن ف ن × ا اَ = ۲ △ ا ف اَ
= ا ف × ف اَ

اس لئے جب ۲ ا = (ا ف × اَ ف) / (و ف × ا اَ) = (ا اَ^۲ جب ا جم ا) / (و ف × ا اَ) = ۲ جب ا جم ا ،

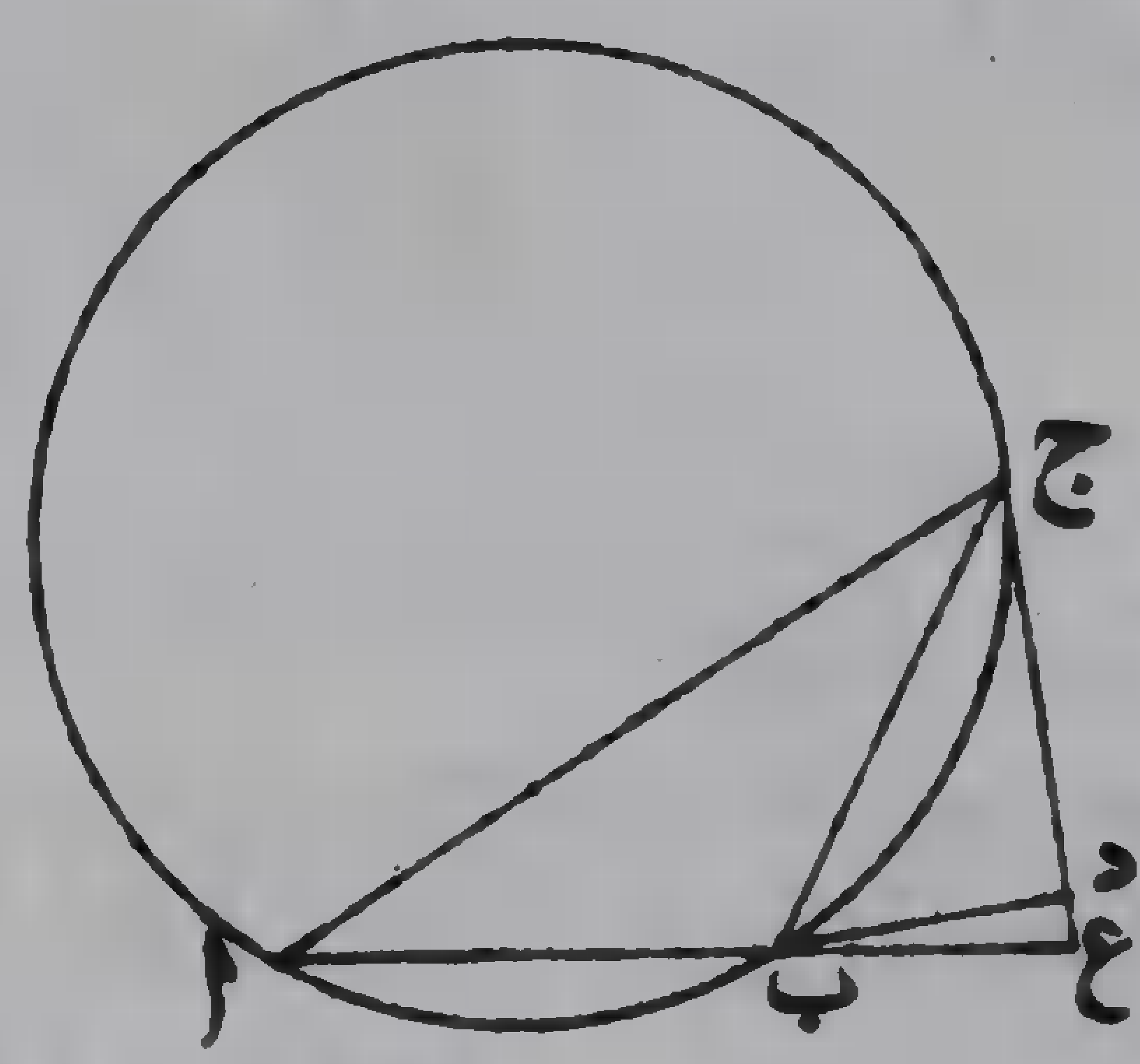
نیز جم ۲ ا = و ن / و ف = (ا ن^۲ − اَ ن^۲) / (۲ × ا اَ × و ف) = (ا ف^۲ − اَ ف^۲) / ا اَ^۲ = جم^۲ ا − جب^۲ ا

(۳) ضابطہ جب ۳ ا = ۳ جب ا − ۴ جب^۳ ا ،
اور جم ۳ ا = ۴ جم^۳ ا − ۳ جم ا
کو ثابت کرو۔

فرض کرو کہ ج ا ب = ا ج ب = ا ، مثلث ا ب ج کا بیرونی دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ ا ب، نقطہ ج پر کے مماس سے نقطہ ع پر ملتا ہے۔ ب د، ج ع پر عمود نکالو۔

(57) زاویہ ب ع د = ۴ ا یا ۱۸۰° − ۳ ا

اب ا ع / ب ع = △ ا ج ع / △ ب ج ع = ا ج^۲ / ب ج^۲ = ۴ جم^۲ ا



اس لئے $\frac{\text{اب}}{\text{بع}} = \text{۴ جم}^{۲}\text{ا} - ۱ = ۳ - \text{۴ جب}^{۲}\text{ا}$ ؛

پس $\text{جب ۳ا} = \frac{\text{بد}}{\text{بع}} = \frac{\text{بد}}{\text{اب}} \times \frac{\text{اب}}{\text{بع}} = \text{۳ جب ا} - \text{۴ جب}^{۳}\text{ا}$ ،

اور $\text{جم ۳ا} = \mp \frac{\text{دع}}{\text{بع}} = \frac{\text{دج}}{\text{بع}} - \frac{\text{عج}}{\text{بع}} = \frac{\text{دج}}{\text{بج}} \times \frac{\text{بج}}{\text{بع}} - \frac{\text{اج}}{\text{اب}}$

$= \text{جم ا} (\text{۴ جم}^{۲}\text{ا} - ۱) - \text{۲ جم ا} = \text{۴ جم}^{۳}\text{ا} - \text{۳ جم ا}$

(۱) اور (۲) کے ثبوت مسٹر بارٹ نے (Messenger of Mathematics) کی جلد چہارم میں دئے تھے۔

مثالیں

ضوابط ذیل کو ہندسی طور پر ثابت کرو۔

(۱) $\text{مس}^{۲}\text{ا} = \frac{۱ - \text{جم ۲ا}}{۱ + \text{جم ۲ا}}$

(۲) $\text{مس} (۴۵^\circ + \text{ا}) - \text{مس} (۴۵^\circ - \text{ا}) = \text{۲ مس ۲ا}$

(۳) $\text{جب ا جب ب} = \text{جب}^{۲} \tfrac{۱}{۲} (\text{ا} + \text{ب}) - \text{جب}^{۲} \tfrac{۱}{۲} (\text{ا} - \text{ب})$

(۴) $\text{جب}^{۲}\text{ عہ} + \text{جب}^{۲}\text{ بہ} = \text{جب}^{۲} (\text{عہ} + \text{بہ}) - \text{۲ جب عہ جب بہ جم} (\text{عہ} + \text{بہ})$

(۵) $\text{مس}^{-۱} \frac{\text{م}}{\text{ن}} - \text{مس}^{-۱} \frac{\text{م} - \text{ن}}{\text{م} + \text{ن}} = \frac{\pi}{۴}$

(۶) $\text{جم}^{۲}\text{ا} + \text{جم}^{۲}\text{ب} + \text{جم}^{۲}\text{ج} + \text{۲ جم ا جم ب جم ج} = ۱$ ،
جہاں $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = ۱۸۰^\circ$

(۷) $\text{جب ا} + \text{جب ب} - \text{جب ج} = \text{۴ جب} \tfrac{۱}{۲}\text{ا جب} \tfrac{۱}{۲}\text{ب جم} \tfrac{۱}{۲}\text{ج}$
جہاں $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = ۱۸۰^\circ$

(۸) $\text{مم ط} = \text{قم ۲ط} + \text{مم ۲ط}$

(۹) جم ۳۶° - جب ۱۸° = ۱/۲

(58)

چوتھے باب پر مثالیں

مثاثلات ۱ تا ۱۵ ثابت کرو۔

۱۔ جم^۲ ا + جم^۲ (۱۲۰° + ا) + جم^۲ (۱۲۰° - ا) = ۳/۲

۲۔ (جم ا + جب ا)^۴ + (جم ا - جب ا)^۴ = ۳ - جم ۴ ا

۳۔ جب ۳ ا جب^۳ ا + جم ۳ ا جم^۳ ا = جم^۳ ۲ ا

۴۔ ۴ جم^۳ ا جب ۳ ا + ۴ جب^۳ ا جم ۳ ا = ۳ جب ۴ ا

۵۔ جب^۳ ا + جب^۳ (۱۲۰° + ا) - جب^۳ (۱۲۰° - ا) = - ۳/۴ جب ۳ ا

۶۔ (جب ا + جب ۳ ا + جب ۵ ا + جب ۷ ا) / (جم ا + جم ۳ ا + جم ۵ ا + جم ۷ ا) = مس ۴ ا

۷۔ ۱۶ جم^۵ ا - جم ۵ ا = ۵ جم ا (۱ + ۲ جم ۲ ا)

۸۔ قم (م + ن) لا قم م لا قم ن لا - مم (م + ن) لا مم م لا مم ن لا

= مم م لا + مم ن لا - مم (م + ن) لا

۹۔ Σ جم ا (جم ۳ ب - جم ۳ ج)

= ۴ (جم ب - جم ج) (جم ج - جم ا) (جم ا - جم ب) (جم ا + جم ب + جم ج)

۱۰۔ Σ جب ا (جب^۲ ب + جب^۲ ج) جب (ب - ج)

= جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب) جب (ا + ب + ج)

۱۱۔ مس (ا + ۶۰°) مس (ا - ۶۰°) + مس ا مس (ا + ۶۰°) + مس (ا - ۶۰°) مس ا

= - ۳

۱۲۔ مم (ا + ۶۰°) مم (ا - ۶۰°) + مم ا مم (ا + ۶۰°) + مم (ا - ۶۰°) مم ا

= - ۳

۱۳- جم۳ا/جم ا − جم۶ا/جم۲ا + جم۹ا/جم۳ا − جم۱۸ا/جم۶ا

= ۲ (جم۲ا − جم۳ا + جم۶ا − جم۱۲ا)

۱۴- Σ جب(ب + ج + د − ا) / جب(ا − ب) جب(ا − ج) جب(ا − د) = ۰

۱۵- جم۴ا / جب ا جب(ا − ب) جب(ا − ج) + جم۴ب / جب ب جب(ب − ا) جب(ب − ج)

+ جم۴ج / جب ج جب(ج − ا) جب(ج − ب) = ۸ جب(ا + ب + ج) + قم ا قم ب قم ج

اگر ا + ب + ج = π تو روابط از مثال ۱۶ تا ۲۷ ثابت کرو:-

۱۶- Σ مس ا مم ب مم ج = Σ مس ا − ۲ Σ مم ا

۱۷- Σ مم ا = مم ا مم ب مم ج + قم ا قم ب قم ج

۱۸- Σ جب(ب − ج) جم³ا = − جب(ب − ج) جب(ج − ا) جب(ا − ب)

۱۹- Σ (جب ب + جب ج)(جم ج + جم ا)(جم ا + جم ب)

= (جب ب + جب ج)(جب ج + جب ا)(جب ا + جب ب)

۲۰- Σ جب ا جم(ا − ب) جم(ا − ج)

= ۳ جب ا جب ب جب ج + جب۲ا جب۲ب جب۲ج

۲۱- Σ جب۲ب جب۲ج = ۴ {جب²ا جب²ب جب ج + جم²ا جم²ب

× جم²ج + جم ا جم ب جم ج}

۲۲- Σ جم۲ا (مس ب − مس ج) (59)

= −۲ جب(ب − ج) جب(ج − ا) جب(ا − ب) قط ا قط ب قط ج،

۲۳- Σ جم^۲ ا (جب ۲ب + جب ۲ج) = ۲ جب ب جب ج

۲۴- Σ جم ا جب ۳ا = ۱ Σ جب ۲ا { ۳/۲ + Σ جم ۲ا }

۲۵- (جب ا + جب ب + جب ج) (- جب ا + جب ب + جب ج) (جب ا - جب ب + جب ج) × (جب ا + جب ب - جب ج) = جب^۲ ا جب^۲ ب جب^۲ ج

۲۶-

جب^۲ ا	مم ا	۱
جب^۲ ب	مم ب	۱
جب^۲ ج	مم ج	۱

= ۰

۲۷- Σ قم ب قم ج قط (ب - ج)
= قط (ب - ج) قط (ج - ا) قط (ا - ب) (۳ + ۸ جم ا جم ب جم ج)

۲۸- اگر عہ + بہ + جہ = ۱/۲ π تو ثابت کرو کہ
جب^۲ عہ + جب^۲ بہ + جب^۲ جہ + ۲ جب عہ جب بہ جب جہ = ۱

۲۹- ثابت کرو کہ

1 / (۱ + ۲ جم (۱/۳ π + طہ)) + 1 / (۱ + ۲ جم (۱/۳ π - طہ)) = 1 / (۲ جم طہ - ۱)

۳۰- ثابت کرو کہ
جب^۲ (طہ + عہ) + جب^۲ (طہ + بہ) - ۲ جم (عہ - بہ) جب (طہ + عہ) جب (طہ + بہ)
طہ پر منحصر نہیں ہے۔

۳۱- اگر مس بہ = (ن جب عہ جم عہ) / (۱ - ن جب^۲ عہ) تو ثابت کرو کہ
مس (عہ - بہ) = (۱ - ن) مس عہ

۳۲- اگر مس فہ = (جب عہ جب طہ) / (جم طہ - جم عہ)
تو ثابت کرو کہ

مس ط = $\frac{\text{جب ع جب فہ}}{\text{جم فہ ± جم ع}}$

۳۳- اگر ۲√ جم ا = جم ب + جم^{۳} ب ، ۲√ جب ا = جب ب - جب^{۳} ب

تو ثابت کرو کہ ± جب (ا - ب) = جم ۲ ب = $\frac{۱}{۳}$

۳۴- ثابت کرو کہ

$\frac{\text{جم ۳ ط + جم ۳ فہ}}{\text{۲ جم (ط - فہ) - ۱}}$ = (جم ط + جم فہ) جم (ط + فہ) - (جب ط + جب فہ) جب (ط + فہ)

۳۵- اگر ط اور فہ مساوات

جب ط + جب فہ = ۳√ (جم فہ - جم ط)

کو پورا کریں تو جب ۳ ط + جب ۳ فہ = ۰

۳۶- ثابت کرو کہ مس ۷۰° = مس ۲۰° + ۲ مس ۴۰° + ۴ مس ۱۰°

۳۷- اگر $\frac{\text{جم}^{۴}\text{ ع}}{\text{جم}^{۲}\text{ بہ}}$ + $\frac{\text{جب}^{۴}\text{ ع}}{\text{جب}^{۲}\text{ بہ}}$ = ۱ تو

$\frac{\text{جم}^{۴}\text{ بہ}}{\text{جم}^{۲}\text{ ع}}$ + $\frac{\text{جب}^{۴}\text{ بہ}}{\text{جب}^{۲}\text{ ع}}$ = ۱

۳۸- اگر جم (ا + ب) جم (ج + د) = جم (ا - ب) جم (ج - د)

تو مم ا مم ب مم ج = مم د

۳۹- اگر ع + بہ + جہ = $\frac{۱}{۲}$ π تو

(جم ع + جب ع) (جم بہ + جب بہ) (جم جہ + جب جہ) = ۲ (جم ع جم بہ جم جہ + جب ع جب بہ جب جہ)

۴۰- اگر ا + ب + ج = π ، اور جم ا = جم ب جم ج (60)

تو مم ب مم ج = $\frac{۱}{۲}$

۴۱- اگر ۴ جب^{۲} ع جب^{۲} بہ جب^{۲} جہ + جب^{۴} ع + جب^{۴} بہ + جب^{۴} جہ

- ۲ جب۲ ب جب۲ ج - ۲ جب۲ ج جب۲ ع - ۲ جب۲ ع جب۲ ب = ۰

تو ثابت کرو کہ ع ± ب ± ج، π کا ضعف ہے۔

۴۲ - اگر (مس (ع + ب - ج))/(مس (ع - ب + ج)) = (مس ج)/(مس ب) - تو ثابت کرو کہ

جب ۲ ع + جب ۲ ب + جب ۲ ج = ۰

۴۳ - اگر قطا ع = قطا ب قطا ج + مس ب مس ج

تو ثابت کرو کہ قطا ب = قطا ج قطا ع + مس ج مس ع اور قطا ج = قطا ع قطا ب + مس ع مس ب

۴۴ - اگر (جب۲ ط جم ف - جم۲ ط جب ف)/(جم ط مس ع) = (جب۲ ف جم ط - جم۲ ف جب ط)/(جم ف مس ب) = جم (ط + ف)

تو (جب۲ ع جم ب - جم۲ ع جب ب)/(جم ع مس ط) = (جب۲ ب جم ع - جم۲ ب جب ع)/(جم ب مس ف) = جم (ع + ب)

۴۵ - اگر ا، ب، ج مثبت زاویے ہوں ایسے کہ ا + ب + ج = ۹۰° تو ثابت کرو کہ

قطا ا قطا ب قطا ج + ۲ ≤ مس ب مس ج = ۲

۴۶ - اگر (جم (ط + ع) جم (ط + ب) + ۱)/(جم (ب + ج)) = (جم (ط + ج) جم (ط + ع) + ۱)/(جم (ج + ع)) = (جم (ط + ب) جم (ط + ج) + ۱)/(جم (ع + ب))

تو ثابت کرو کہ قم (ب - ع) قم (ج - ب) + قم (ج - ب) قم (ع - ب) + قم (ع - ج) قم (ب - ج) = ۱

۴۷ - اگر جب۴ ط + جب۴ ف = ۴ جب۲ ط جب۲ ف، اور جب ط + جب ف = جب ۱/۴ π

تو ثابت کرو کہ ۲ جب ط = جب (۱/۴ π ± ۱/۴ π) | جب ۱/۴ π، یا جم (۱/۴ π ± ۱/۴ π) | جم ۱/۴ π،

۴۸ - اگر جم (ا + ب + ج) = جم ا جم ب جم ج

تو ۸ جب (ب + ج) جب (ج + ا) جب (ا + ب) + جب ۲ ا جب ۲ ب جب ۲ ج = ۰

۴۹ - اگر مس ط + مس ف + مس ب = - مس ط مس ف مس ب = مس (ط + ف + ب)

تو یا زاویوں ط، ف، ب میں سے دو زاویے م π + ۱/۲ π، ن π - ۱/۲ π کے مساوی ہیں یا ان میں سے ایک اور نیز باقی دو کا مجموعہ π کے ضعف ہیں۔

۵۰۔ اگر $\dfrac{\text{جب (بہ − جہ)}}{\text{جم عہ}}$ جم (ط − ۲ عہ) + $\dfrac{\text{جب (جہ − عہ)}}{\text{جم بہ}}$ جم (ط − ۲ بہ) + $\dfrac{\text{جب (عہ − بہ)}}{\text{جم جہ}}$ جم (ط − ۲ جہ)

= جب (بہ − جہ) جب (جہ − عہ) جب (عہ − بہ)

تو ثابت کرو کہ　جم ط = جم عہ جم بہ جم جہ

۵۱۔ اگر عہ، بہ، جہ، صہ کوئی چار زاویے ہوں اور ۲ ثہ = عہ + بہ + جہ + صہ تو

جم عہ جم بہ جم جہ جم صہ + جب عہ جب بہ جب جہ جب صہ

= جم (ثہ − عہ) جم (ثہ − بہ) جم (ثہ − جہ) جم (ثہ − صہ)

+ جب (ثہ − عہ) جب (ثہ − بہ) جب (ثہ − جہ) جب (ثہ − صہ)

۵۲۔ ثابت کرو کہ (61)

مس$^{-1}$ لا = ۲ مس$^{-1}$ { قم مس$^{-1}$ لا − مس قم$^{-1}$ لا }

۵۳۔ ثابت کرو کہ

۲ مس$^{-1}$ لا + ۲ مس$^{-1}$ ما = جب$^{-1}$ $\left\{ \dfrac{\text{۲ (لا + ما) (۱ − لا ما)}}{\text{(۱ + لا}^{2}\text{) (۱ + ما}^{2}\text{)}} \right\}$

۵۴۔ ثابت کرو کہ

مس$^{-1}$ { $\frac{1}{2}$ (جم ۲ عہ قط ۲ بہ + جم ۲ بہ قط ۲ عہ) } = مس$^{-1}$ { مس^{2} (عہ + بہ) مس^{2} (عہ − بہ) } + مس$^{-1}$ ۱

۵۵۔ ثابت کرو کہ

مس$^{-1}$ ۱ + مس$^{-1}$ ۲ + مس$^{-1}$ ۳ = π = ۲ (مس$^{-1}$ ۱ + مس$^{-1}$ $\frac{1}{2}$ + مس$^{-1}$ $\frac{1}{3}$)

۵۶۔ اگر　جم$^{-1}$ لا + جم$^{-1}$ ما + جم$^{-1}$ ی = π

تو　لا^{2} + ما^{2} + ی^{2} + ۲ لا ما ی = ۱

۵۷۔ اگر مس$^{-1}$ ما = ۵ مس$^{-1}$ لا تو ما کو کے ایک جبری تفاعل کے طور پر معلوم کرو۔ اس سے ثابت کرو کہ مس ۱۸°، مساوات ۵ لا^{4} − ۱۰ لا^{2} + ۱ = ۰ کی ایک اصل ہے۔

۵۸ - اگر ۲ ش = ه + ب + ج تو ثابت کرو کہ

مس$^{-1}$ ((۲ جم ه جم ب جم ج) / (جم^{2} ه + جم^{2} ب + جم^{2} ج - ۱)) = مس$^{-1}$ [مس ش مس (ش - ه) مس (ش - ب) مس (ش - ج)]

= مس$^{-1}$ ۱

۵۹ - ثابت کرو کہ

مس$^{-1}$ √(ا (ا + ب + ج) / ب ج) + مس$^{-1}$ √(ب (ا + ب + ج) / ج ا) + مس$^{-1}$ √(ج (ا + ب + ج) / ا ب) = π

۶۰ - ثابت کرو کہ مساوات

جب$^{-1}$ لا ± جب$^{-1}$ ما ± جب$^{-1}$ ی ± جب$^{-1}$ ع = ن π ، (جہاں ن صحیح عدد ہے)

کا جبری مماثل حسب ذیل ہے

{ ۴ (س - ما) (س - ی) (س - ع) - (لا ما + ی ع) (لا ی + ما ع) (لا ع + ما ی) }

× { ۴ س (س - لا - ما) (س - لا - ی) (س - لا - ع) - (ی ع - لا ما) (ما ع - لا ی)

(ما ی - لا ع) } = ۰

جہاں ۲ س = لا + ما + ی + ع

مثال ۶۱ تا ۷۵ کی مساواتیں حل کرو :-

۶۱ - جب ط + ۲ جم ط = ۱

۶۲ - جب ۵ ط = ۱۶ جب^{5} ط

۶۳ - جب ۰ ط - جب ط = جب ۳ ط

۶۴ - مس ۲ ط = ۸ جم^{2} ط - مم ط

۶۵ - مس (۴۵° + ا) = ۳ مس (۴۵° - ا)

۶۶ - ۲ جب (ط - ذ) = جب (ط + ذ) = ۱

۶۷ - قط ۴ ط - قط ۲ ط = ۲

۶۸ - جب م طہ + جب ن طہ + جب (م + ن) طہ = ۰

۶۹ - جب (ن + ۱)/۲ طہ + جب (ن - ۱)/۲ طہ = جم طہ (62)

۷۰ - مس طہ + قط ۲ طہ = ۱

۷۱ - ۲ (جب^۴ طہ + جم^۴ طہ) = ۱

۷۲ - مس طہ + مس ۳ طہ + مس ۵ طہ = ۰

۷۳ - مم^-۱ لا - مم^-۱ (لا + ۲) = ۱۵°

۷۴ - ا جب^-۱ لا + ب جم^-۱ ما = عہ ،

ا جم^-۱ لا - ب جب^-۱ ما = بہ

۷۵ - قم ۴ عہ - قم ۴ طہ = مم ۴ عہ - مم ۴ طہ

۷۶ - تفاعلوں (ا) جب لا + جب ۲ لا ،

(ب) جم ۲ لا / جم لا

کی ترسیمات کھینچو۔

۷۷ - مساوات ا (جب طہ - جم عہ) = ب (جب عہ - جم طہ)

کے سب حل دریافت کرو۔

۷۸ - اگر م صحیح عدد ہو اور ا + ب + ج = π تو ثابت کرو کہ

جب ۲م ا + جب ۲م ب + جب ۲م ج = (-۱)^(م+۱) ۴ جب م ا جب م ب جب م ج ،

جم ۲م ا + جم ۲م ب + جم ۲م ج = (-۱)^م ۴ جم م ا جم م ب جم م ج - ۱

۷۹ - ثابت کرو کہ لا + ۸ لا ی + ۴ ی^۲ = ۴ لا^۲ ما

جہاں لا = جب ا + جب ب + جب ج ، ما = جب ب جب ج + جب ج جب ا + جب ا جب ب ، ی = جب ا جب ب جب ج

۸۰ - اگر (۱ - مس ب مس ج)/جم^۲ ا + (۱ - مس ج مس ا)/جم^۲ ب = ۲ (۱ - مس ا مس ب)/جم^۲ ج

تو ثابت کرو کہ یا تو مس ا، مس ب، مس ج سلسلہ حسابیہ میں ہیں یا
ا + ب + ج، π کا ایک صحیح عددی ضعف ہے۔

۸۱ - اگر جم ا = جم ط جب ف، جم ب = جم ف جب ہ، جم ج = جم ہ جب ط
اور ا + ب + ج = π تو ثابت کرو کہ مس ط مس ف مس ہ = ۱

۸۲ - اِن مساواتوں کو حل کرو:—

۴ (جم ۲ ط + جم ۴ ط) (جم ۳ ط + جم ط) = ۱

۴ (جم ۳ ط + جم ۵ ط) (جم ۶ ط + جم ۷ ط) = ۱-

پانچواں باب (63)

تحت ضعفی زاویوں کے دائری تفاعل

ضوابط

۵۵ — اگر ہم گزشتہ باب کے ضابطہ (۳۴) میں ا کی بجائے $\frac{1}{2}$ عہ لکھیں تو

$$\text{جم عہ} = \text{جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{عہ} - \text{جب}^2 \tfrac{1}{2}\text{عہ} = 2\,\text{جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{عہ} - 1 = 1 - 2\,\text{جب}^2 \tfrac{1}{2}\text{عہ}$$

اس لئے $1 - \text{جم عہ} = 2\,\text{جب}^2 \tfrac{1}{2}\text{عہ}$ ، $1 + \text{جم عہ} = 2\,\text{جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{عہ}$ ،

جذر المربع لینے سے جم $\frac{1}{2}$ عہ اور جب $\frac{1}{2}$ عہ کے لئے جم عہ کی رقوم میں حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں :-

$$\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\text{عہ} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \text{جم عہ})}$$

$$\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\text{عہ} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \text{جم عہ})}$$

ان میں سے پہلے ضابطہ کو دوسرے سے تقسیم کرو تو

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{عہ} = \pm\sqrt{\frac{1 - \text{جم عہ}}{1 + \text{جم عہ}}}$$

اِن تین ضابطوں میں علامت کا ابہام ہے، اب اگر عہ دیا گیا ہے تو

تفاعلوں جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، مس $\frac{1}{2}$ عہ میں سے ہر ایک کی ایک یگانہ قیمت ہے، اور اس لئے ان کے لئے جو جملے حاصل ہونگے ان میں علامت کا ابہام نہیں ہو سکتا۔ محصلہ بالا تین جملوں میں علامت کا ابہام اس وجہ سے ہے کہ اِن سے جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، مس $\frac{1}{2}$ عہ کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جب کہ جم عہ کی قیمت دیگئی ہو، نہ کہ جب، عہ دیا گیا ہو۔

اب جیسا کہ ہم نے دفعہ ۴۳ میں ثابت کیا ہے زاویوں ۲ ن π عہ میں سے سب زاویوں کی جیب التمام وہی ہے جو عہ کی ہے جبکہ ن ایک صحیح عدد ہو، اس لئے وہ ضابطے جو جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، مس $\frac{1}{2}$ عہ کو جم عہ کی رقوم میں بیان کرتے ہیں اُن سے نہ صرف خود جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، مس $\frac{1}{2}$ عہ کی قیمتیں حاصل ہونگی بلکہ ان سے ضابطہ $\frac{1}{2}$ (۲ ن π $\pm$ عہ) میں شریک تمام زاویوں کے اِن تفاعلوں کی قیمتیں حاصل ہونگی۔

(64) جب $\frac{1}{2}$ (۲ ن π $\pm$ عہ) کی جو قیمتیں ہوسکتی ہیں اُن کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں دو صورتوں پر غور کرنا چاہیئے، ایک وہ صورت جبکہ ن جفت ہو اور دوسری وہ جبکہ ن طاق ہو۔ اگر ن = ۲ م تو

جب $\frac{1}{2}$ (۴ م π $\pm$ عہ) = جب ($\pm$ $\frac{1}{2}$ عہ) = $\pm$ جب $\frac{1}{2}$ عہ

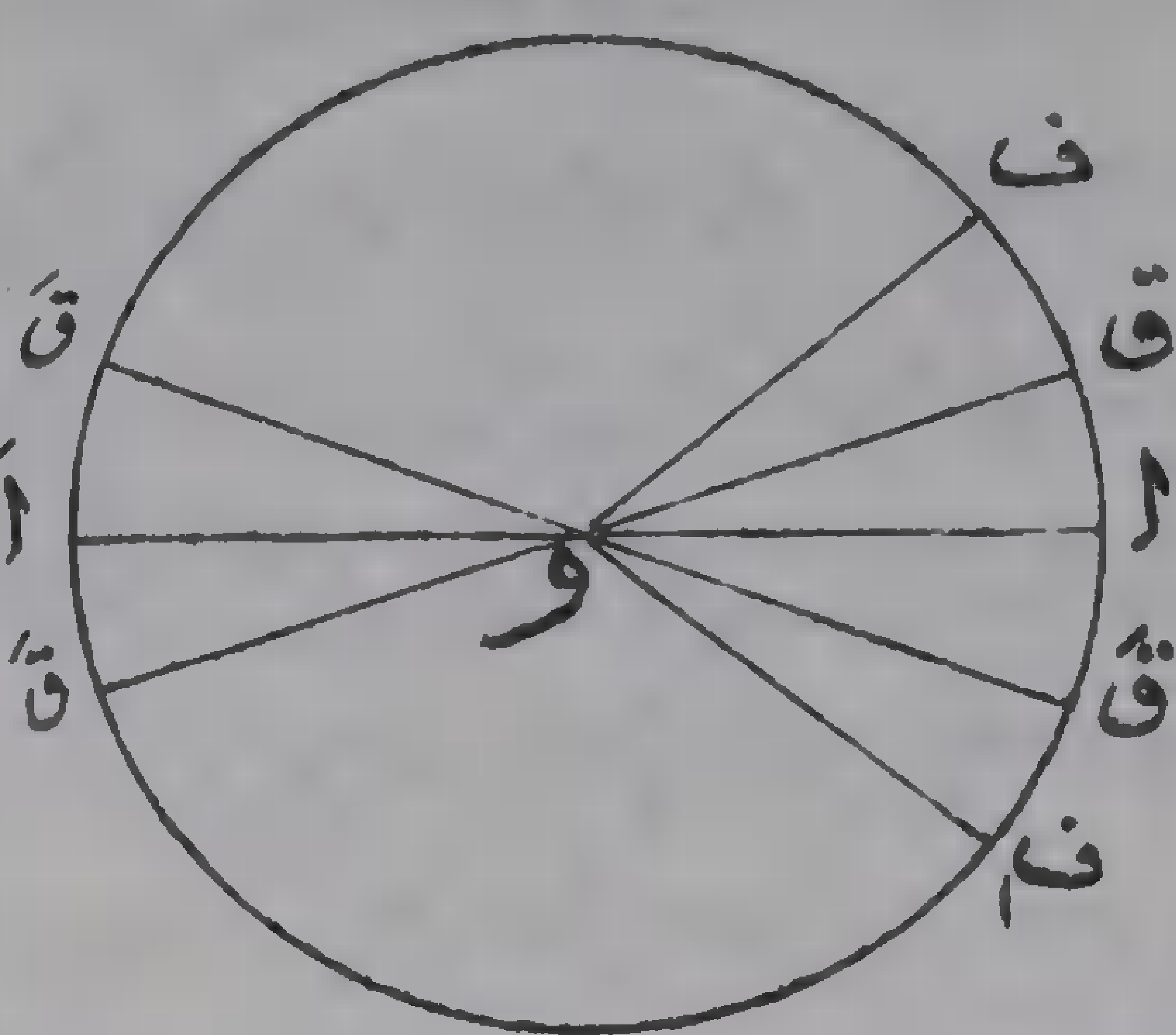
لیکن اگر ن = ۲ م + ۱ تو

جب $\frac{1}{2}$ (۴ م π + ۲ π $\pm$ عہ) = جب (π $\pm$ عہ) = $\mp$ جب $\frac{1}{2}$ عہ

پس جب $\frac{1}{2}$ عہ اور − جب $\frac{1}{2}$ عہ کی قیمتیں اُس ضابطہ سے حاصل ہوتی ہیں جو جب $\frac{1}{2}$ عہ کو جم عہ کی رقوم میں بیان کرتا ہے۔

اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ جم $\frac{1}{2}$ (۲ ن π ± عہ) اور مس $\frac{1}{2}$(۲ن π ± عہ) کی قیمتیں ± جم $\frac{1}{2}$ عہ، ± مس $\frac{1}{2}$ عہ ہیں، اور اس طرح اُن ضابطوں سے جو جم $\frac{1}{2}$ عہ اور مس $\frac{1}{2}$ عہ کو جم عہ کی رقوم میں بیان کرتے ہیں جم $\frac{1}{2}$ عہ، ۔جم $\frac{1}{2}$ عہ اور مس $\frac{1}{2}$ عہ، ۔مس $\frac{1}{2}$ عہ کی قیمتیں علی الترتیب حاصل ہوتی ہیں۔ پس متذکرہ صدر تین ضابطوں میں علامت کا جو ابہام ہے اُس کی توضیح ہو چکی۔

۵۶ — محصلہ بالا تین ضابطوں میں علامت کا جو ابہام ہے اُس کی ہندسی توضیح بھی ہو سکتی ہے۔



اگر ا و ف = عہ اور ا و فَ = ۔ عہ تو ہم اختتامی زاویوں کے دو جبٹ (وا، وف)، (وا، وفَ) ہی وہ جبٹ ہیں جن میں سے ہر زاویے کی جیب التمام وہی ہے جو عہ کی ہے، اگر زاویوں ا و ف، ا و فَ کے ناصف علی الترتیب ق و ق، قَ و قَ ہوں تو زاویوں (وا، وفَ) کا ناصف و قَ یا و قَ ہے، اس لئے جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، مس $\frac{1}{2}$ عہ کے ضابطوں سے جبکہ جم عہ دیا گیا ہو اِن تمام ہم اختتامی

زاویوں کی جیب، جیب التمام، مماس حاصل ہوتے ہیں جو چار جٹوں (وا، وق)
(وا، وق) (وا، وقَ) (وا، وقَ) میں شامل ہیں۔ پہلے اور چوتھے جٹوں
کے زاویوں کی جیوب، جب $\frac{1}{2}$ ع کے مساوی ہیں، اور دوسرے اور
تیسرے جٹوں کے زاویوں کی جیوب، - جب $\frac{1}{2}$ ع کے مساوی ہیں؛
پہلے اور تیسرے جٹوں کے زاویوں کی جیوب التمام، جم $\frac{1}{2}$ ع کے (65)
مساوی ہیں اور دوسرے اور چوتھے جٹوں کی جیوب التمام، - جم $\frac{1}{2}$ ع
کے مساوی، پہلے اور دوسرے جٹوں کے زاویوں کے مماس، مس $\frac{1}{2}$ ع
کے مساوی ہیں، اور تیسرے اور چوتھے جٹوں کے زاویوں کے مماس،
- مس $\frac{1}{2}$ ع کے مساوی۔

۵۷ — اب ہم دفعہ ۵۵ کے تین ضابطوں سے علامت کے ابہامات
دور کرینگے۔ تفاعل جب $\frac{1}{2}$ ع مثبت یا منفی ہے بموجب اس کے کہ $\frac{1}{2}$ ع،
۲ ن π اور (۲ ن + ۱) π کے درمیان یا (۲ ن + ۱) π اور (۲ ن + ۲) π
کے درمیان واقع ہو، یعنی بموجب اس کے کہ $\frac{\text{ع}}{2\pi}$، ۲ ن اور ۲ ن + ۱ یا
۲ ن + ۱ اور ۲ ن + ۲ کے درمیان واقع ہو۔

اس لئے ہمیں ضابطہ

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\text{ع} = (-1)^{\text{ف}} \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \text{جم ع})} \quad \ldots \quad (1)$$

حاصل ہوتا ہے جس میں ف ایسا مثبت یا منفی صحیح عدد ہے جو جبری طور
پر $\frac{\text{ع}}{2\pi}$ سے عین چھوٹا ہے۔

تفاعل جم $\frac{1}{2}$ ع مثبت یا منفی ہے بموجب اس کے کہ $\frac{1}{2}$ ع،
۲ ن π - $\frac{1}{2}$ π اور ۲ ن π + $\frac{1}{2}$ π کے درمیان یا ۲ ن π + $\frac{1}{2}$ π

اور ۲ ن π + $\frac{۳}{۲}$ π کے درمیان واقع ہو یعنی بموجب اس کے کہ $\frac{۱}{۲}$ (عہ + π)\π ، ۲ ن اور ۲ ن + ۱ یا ۲ ن + ۱ اور ۲ ن + ۲ کے درمیان واقع ہو؛ اسلیے

$$\text{جم}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{عہ} = (-۱)^{\text{ق}} \sqrt{\tfrac{۱}{۲}(۱ + \text{جم عہ})} \quad \ldots\ldots \quad (۲)$$

جس میں ق وہ صحیح عدد ہے جو $\frac{۱}{۲}$ (عہ + π)/π سے جبری طور پر عین چھوٹا ہے۔
اسی طرح

$$\text{مس}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{عہ} = (-۱)^{\text{ف - ق}} \sqrt{\frac{۱ - \text{جم عہ}}{۱ + \text{جم عہ}}} \quad \ldots\ldots \quad (۳)$$

جس میں عدد ف - ق ہمیشہ یا تو صفر ہے یا ± ۱ -

۵۸ - اگر ہم گزشتہ باب کے ضابطہ (۳۵) میں ا کی بجائے $\frac{۱}{۲}$ عہ لکھیں تو

$$\text{جب عہ} = ۲\ \text{جب}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{عہ جم}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{عہ}$$

اس لئے

$$\text{مس}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{عہ} = \frac{\text{جب}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{عہ}}{\text{جم}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{عہ}} = \frac{\text{جب عہ}}{۲\ \text{جم}^{۲}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{عہ}} = \frac{۲\ \text{جب}^{۲}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{عہ}}{\text{جب عہ}}$$

اس طرح ہمیں حسب ذیل دو ضابطے ملتے ہیں :-

$$\text{مس}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{عہ} = \frac{\text{جب عہ}}{۱ + \text{جم عہ}} = \frac{۱ - \text{جم عہ}}{\text{جب عہ}} \quad \ldots\ldots \quad (۴)$$

جن سے مس $\frac{۱}{۲}$ عہ بغیر کسی ابہام کے حاصل ہوتا ہے۔ ان ضابطوں سے مس $\frac{۱}{۲}$ عہ حاصل ہوگا جبکہ جب عہ اور جم عہ دونوں دئے جائیں؛ اب ضابطہ ۲ ن π + عہ میں وہ سب زاویئے شامل ہیں جن کی جیب اور جیب التمام وہی ہیں جو عہ کی جیب اور جیب التمام ہیں، اس لئے مس $\frac{۱}{۲}$ عہ کے مذکورہ بالا ضابطوں سے جو جیب عہ اور جم عہ کی رقوم میں بیان ہوئے ہیں زاویوں ن π + $\frac{۱}{۲}$ عہ میں سے سب زاویوں کے مماس حاصل ہوتے ہیں، اور

(66) یہ تمام زاویے ایک ہی مماس مس $\frac{1}{2}$ عہ رکھتے ہیں، اسی وجہ سے ضوابط (۴) میں علامت کا ابہام نہیں ہے۔

۵۹ — اب ہم جب عہ کی رقوم میں جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، مس $\frac{1}{2}$ عہ کے لئے ضابطے حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

۱ + جب عہ = ۱ + ۲ جب $\frac{1}{2}$ عہ جم $\frac{1}{2}$ عہ = (جب $\frac{1}{2}$ عہ + جم $\frac{1}{2}$ عہ)^2

نیز ۱ − جب عہ = ۱ − ۲ جب $\frac{1}{2}$ عہ جم $\frac{1}{2}$ عہ = (جب $\frac{1}{2}$ عہ − جم $\frac{1}{2}$ عہ)^2

اس لئے جب $\frac{1}{2}$ عہ + جم $\frac{1}{2}$ عہ = $\pm\sqrt{}$(۱ + جب عہ)

جب $\frac{1}{2}$ عہ − جم $\frac{1}{2}$ عہ = $\pm\sqrt{}$(۱ − جب عہ)

اس لئے جب $\frac{1}{2}$ عہ = $\frac{1}{2}$ {$\pm\sqrt{}$(۱ + جب عہ) $\pm\sqrt{}$(۱ − جب عہ)}،

جم $\frac{1}{2}$ عہ = $\frac{1}{2}$ {$\pm\sqrt{}$(۱ + جب عہ) $\mp\sqrt{}$(۱ − جب عہ)}

مبہم علامتوں میں سے ہر علامت لیجا سکتی ہے، اس لئے جب عہ کی رقوم میں جب $\frac{1}{2}$ عہ کی چار قیمتیں ملتی ہیں۔ یہ ضابطے جو جب $\frac{1}{2}$ عہ اور جم $\frac{1}{2}$ عہ کو جب عہ کی رقوم میں بیان کرتے ہیں ان سے علی الترتیب اُن تمام زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام حاصل ہوتی ہیں جو ضابطہ $\frac{1}{2}$ (ن π + $(-1)^{ن}$ عہ) میں شامل ہیں، کیونکہ جیسا کہ ہم نے دفعہ (۴۳) میں بتا دیا ہے اِن زاویوں کی جیوب جو (ن π + $(-1)^{ن}$ عہ) میں شامل ہیں جب عہ کے مساوی ہیں۔ زاویوں $\frac{1}{2}$ (ن π + $(-1)^{ن}$ عہ) کی جیب اور جیب التمام معلوم کرنے کے لئے ہمیں چار صورتوں پر غور کرنا چاہیے۔

(۱) اگر ن = ۲ م تو

$\frac{1}{2}$ (ن π + $(-1)^{ن}$ عہ) = ۲ م π + $\frac{1}{2}$ عہ

اِن زاویوں کی جیب اور جیب التمام علی الترتیب جیب $\frac{1}{2}$ عہ اور جم $\frac{1}{2}$ عہ ہے

(٢) اگر ن = ٤م + ١ تو

$\frac{1}{2}$ (ن π + $(-1)^{ن}$ عہ) = ٢م π + $\frac{1}{2}$ π − $\frac{1}{2}$ عہ

اِن زاویوں کی جیب اور جیب التمام علی الترتیب جم $\frac{1}{2}$ عہ اور جب $\frac{1}{2}$ عہ ہے۔

(٣) اگر ن = ٤م + ٢ تو

$\frac{1}{2}$ (ن π + $(-1)^{ن}$ عہ) = ٢م π + π + $\frac{1}{2}$ عہ

اِن زاویوں کی جیب اور جیب التمام علی الترتیب − جب $\frac{1}{2}$ عہ اور − جم $\frac{1}{2}$ عہ ہے

(٤) اگر ن = ٤م + ٣ تو

$\frac{1}{2}$ (ن π + $(-1)^{ن}$ عہ) = (٢م + ١) π + $\frac{1}{2}$ π − $\frac{1}{2}$ عہ

اِن زاویوں کی جیب اور جیب التمام علی الترتیب − جم $\frac{1}{2}$ عہ اور − جب $\frac{1}{2}$ عہ کے مساوی ہے۔

(67) اس طرح جب $\frac{1}{2}$ عہ کے ضابطے سے چار قیمتیں جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، − جب $\frac{1}{2}$ عہ، − جم $\frac{1}{2}$ عہ حاصل ہوتی ہیں اور جم $\frac{1}{2}$ عہ کے ضابطہ سے چار قیمتیں جم $\frac{1}{2}$ عہ، جب $\frac{1}{2}$ عہ، − جم $\frac{1}{2}$ عہ، − جب $\frac{1}{2}$ عہ۔

لا اور ما کی قیمتوں کے وہ چار جٹ جو مساواتوں

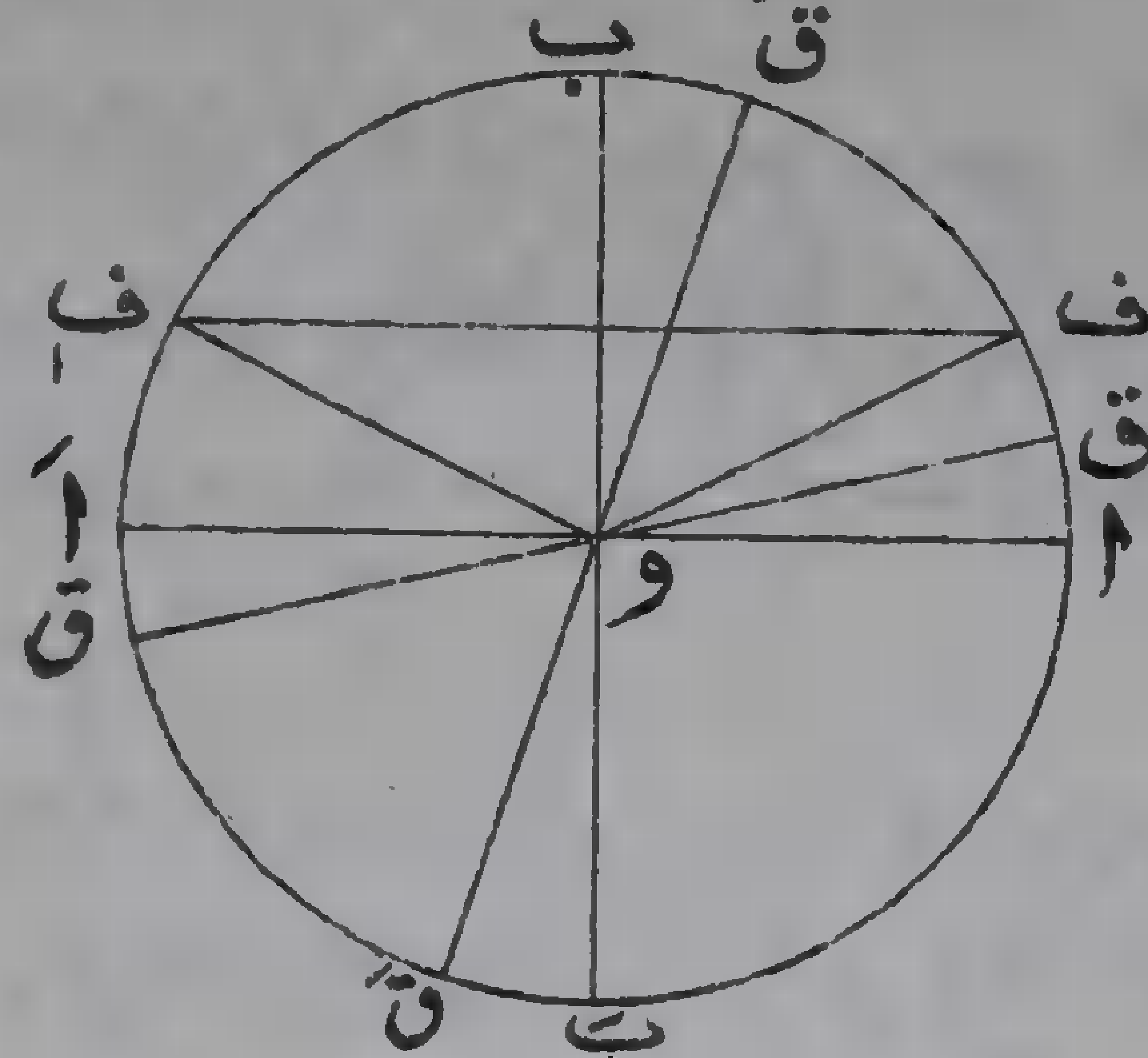
$(لا + ما)^2$ = ١ + جب عہ

$(لا - ما)^2$ = ١ − جب عہ

کو پورا کرتے ہیں حسب ذیل ہیں

{لا = جب $\frac{1}{2}$ عہ ، ما = جم $\frac{1}{2}$ عہ} ، {لا = جم $\frac{1}{2}$ عہ ، ما = جب $\frac{1}{2}$ عہ} ، {لا = − جب $\frac{1}{2}$ عہ ، ما = − جم $\frac{1}{2}$ عہ} ، {لا = − جم $\frac{1}{2}$ عہ ، ما = − جب $\frac{1}{2}$ عہ}

۶۰۔ گزشتہ دفعہ کے ضابطوں کے ابہامات کی ہندسی توضیح حسب سابق ہو سکتی ہے۔ فرض کرو کہ ف و ا = عہ، ف‌ا و ا = ۲ط - عہ تو وہ



زاوئے جن کی جیب وہی ہے جو عہ کی ہے ہم اختتامی زاویوں (و ا، و ف)، (و ا، و ف‌ا) کے دو جبٹ ہیں، پس اگر زاویوں ا و ف، ا و ف‌ا کے ناصف ق و ق، قَ و قً ہوں تو ہم اختتامی زاویوں (و ا، و ق)، (و ا، و ق)، (و ا، و قَ)، (و ا، و قً) کے چار جبٹ وہ زاوئے ہونگے جن کی جیب اور جیب التمام اُن ضابطوں سے حاصل ہوگی جو جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ کو بیان کرتے ہیں جبکہ جب عہ دیا گیا ہو۔ ہم دیکھتے ہیں کہ قَ و ب = $\frac{1}{2}$ عہ اور قَ و ا = $\frac{1}{2}$ (۲ط - عہ)، اس لئے ہم اختتامی زاویوں کے ان چار جبٹوں کی جیوب جب $\frac{1}{2}$ عہ، - جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، - جم $\frac{1}{2}$ عہ ہیں اور ان کی جیوب التمام جم $\frac{1}{2}$ عہ، - جم $\frac{1}{2}$ عہ، جب $\frac{1}{2}$ عہ، - جب $\frac{1}{2}$ عہ ہیں - جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ کی علی الترتیب چار قیمتیں ہیں جو اوپر کے دو ضابطوں سے حاصل ہوتی ہیں۔

۶۱۔ چونکہ

$$\text{جب}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} + \text{جم}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} = \sqrt{۲}\left(\tfrac{۱}{\sqrt{۲}}\ \text{جب}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} + \tfrac{۱}{\sqrt{۲}}\ \text{جم}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ}\right)$$

$$= \sqrt{۲}\ \text{جب}\left(\tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} + \tfrac{۱}{۴}\,\pi\right)$$

اور اسی طرح (68)

$$\text{جب}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} - \text{جم}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} = \sqrt{۲}\ \text{جب}\left(\tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} - \tfrac{۱}{۴}\,\pi\right)$$

اس لئے $\text{جب}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} + \text{جم}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ}$ مثبت ہے یا منفی بموجب اس کے کہ $\frac{\text{عہ}}{۲\pi} + \frac{۱}{۴}$ ، ۲ ن اور ۲ ن + ۱ کے درمیان واقع ہے یا ۲ ن + ۱ اور ۲ ن + ۲ کے درمیان۔

اور $\text{جب}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} - \text{جم}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ}$ مثبت ہے یا منفی بموجب اس کے کہ $\frac{\text{عہ}}{۲\pi} - \frac{۱}{۴}$ ، ۲ ن اور ۲ ن + ۱ کے درمیان واقع ہے یا ۲ ن + ۱ اور ۲ ن + ۲ کے درمیان۔

اس لئے

$$\text{جب}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} + \text{جم}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} = (-۱)^{\text{ف}}\sqrt{۱ + \text{جب عہ}}\ ،$$

$$\text{جب}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} - \text{جم}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} = (-۱)^{\text{ق}}\sqrt{۱ - \text{جب عہ}}\ ،$$

جہاں ف مثبت یا منفی صحیح عدد ہے جو جبری طور پر $\frac{\text{عہ}}{۲\pi} + \frac{۱}{۴}$ سے عین چھوٹا ہے اور ق وہ صحیح عدد ہے جو جبری طور پر $\frac{\text{عہ}}{۲\pi} - \frac{۱}{۴}$ سے عین چھوٹا ہے۔ اس طرح ہمیں یہ تین ضابطے ملتے ہیں

$$\text{جب}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} = \tfrac{۱}{۲}\left\{(-۱)^{\text{ف}}\sqrt{۱ + \text{جب عہ}} + (-۱)^{\text{ق}}\sqrt{۱ - \text{جب عہ}}\right\} \quad (۵)$$

$$\text{جم}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} = \tfrac{۱}{۲}\left\{(-۱)^{\text{ف}}\sqrt{۱ + \text{جب عہ}} - (-۱)^{\text{ق}}\sqrt{۱ - \text{جب عہ}}\right\} \quad (۶)$$

$$\text{مس}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{عہ} = \frac{(-۱)^{\text{ف}}\sqrt{۱+\text{جب عہ}} + (-۱)^{\text{ق}}\sqrt{۱-\text{جب عہ}}}{(-۱)^{\text{ف}}\sqrt{۱+\text{جب عہ}} - (-۱)^{\text{ق}}\sqrt{۱-\text{جب عہ}}} \text{،} \ldots (۶۷)$$

۶۲ — جب $\tfrac{۱}{۲}$ عہ، جم $\tfrac{۱}{۲}$ عہ، مس $\tfrac{۱}{۲}$ عہ کو مس عہ کی رقوم میں بیان کرو۔ چونکہ

$$\text{جب}^{۲}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{عہ} = \tfrac{۱}{۲}\left(۱-\text{جم عہ}\right)$$

$$= \tfrac{۱}{۲}\left(۱-\frac{۱}{\pm\sqrt{۱+\text{مس}^{۲}\ \text{عہ}}}\right)\text{،}$$

$$\text{جم}^{۲}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{عہ} = \tfrac{۱}{۲}\left(۱+\frac{۱}{\pm\sqrt{۱+\text{مس}^{۲}\ \text{عہ}}}\right)$$

$$\text{اس لئے جب}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{عہ} = \pm\sqrt{\tfrac{۱}{۲}\left(۱-\frac{۱}{\pm\sqrt{۱+\text{مس}^{۲}\ \text{عہ}}}\right)}\text{،}$$

$$\text{جم}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{عہ} = \pm\sqrt{\tfrac{۱}{۲}\left(۱+\frac{۱}{\pm\sqrt{۱+\text{مس}^{۲}\ \text{عہ}}}\right)}$$

$$\text{اور اس لئے مس}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{عہ} = \pm\frac{\sqrt{۱+\text{مس}^{۲}\ \text{عہ}}-۱}{\text{مس عہ}}$$

ان میں سے ہر ضابطہ میں علامت کے ابہامات ہیں۔ ہم ان کی بحث کو طالب علم پر چھوڑتے ہیں کیونکہ ان کی توضیح پچھلی صورتوں کی طرح ہو سکتی ہے۔

یہ توجہ طلب ہے کہ مس $\tfrac{۱}{۲}$ عہ کی قیمتیں، مس $\tfrac{۱}{۲}$ عہ کی دو درجی مساوات

$$\text{مس عہ} = \frac{۲\ \text{مس}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{عہ}}{۱-\text{مس}^{۲}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{عہ}}$$ (69)

کی اصلیں ہیں، یہ مساوات گزشتہ باب کے ضابطہ (۴۱) میں ا کی بجائے $\tfrac{۱}{۲}$ عہ رکھنے سے حاصل کی گئی ہے۔

۶۳ ـ تفاعل جب عہ، جم عہ، مس عہ بغیر ابہام کے مس $\frac{1}{2}$ عہ کی رقوم میں بیان کیے جا سکتے ہیں، کیونکہ وہ تمام زاویے جن کا مماس وہی ہے جو $\frac{1}{2}$ عہ کا ہے ضابطہ ن π + $\frac{1}{2}$ عہ میں شامل ہیں، اور ۲ (ن π + $\frac{1}{2}$ عہ) یا ۲ ن π + عہ وہ زاویے ہیں جن کے تمام دائری تفاعل وہی ہیں جو عہ کے ہیں ـ پس

$$\text{جب عہ} = \frac{\text{۲ جب}\ \frac{1}{2}\ \text{عہ جم}\ \frac{1}{2}\ \text{عہ}}{\text{جم}^2\ \frac{1}{2}\ \text{عہ} + \text{جب}^2\ \frac{1}{2}\ \text{عہ}} = \frac{\text{۲ مس}\ \frac{1}{2}\ \text{عہ}}{\text{۱} + \text{مس}^2\ \frac{1}{2}\ \text{عہ}}\ ،$$

$$\text{جم عہ} = \frac{\text{جم}^2\ \frac{1}{2}\ \text{عہ} - \text{جب}^2\ \frac{1}{2}\ \text{عہ}}{\text{جم}^2\ \frac{1}{2}\ \text{عہ} + \text{جب}^2\ \frac{1}{2}\ \text{عہ}} = \frac{\text{۱} - \text{مس}^2\ \frac{1}{2}\ \text{عہ}}{\text{۱} + \text{مس}^2\ \frac{1}{2}\ \text{عہ}}$$

اس لئے نیز

$$\text{مس عہ} = \frac{\text{۲ مس}\ \frac{1}{2}\ \text{عہ}}{\text{۱} - \text{مس}^2\ \frac{1}{2}\ \text{عہ}}$$

مثالیں

(۱) ـ اگر ۲ جم ط = $\sqrt{\text{۱} - \text{جب ۲ ط}} - \sqrt{\text{۱} + \text{جب ۲ ط}}$ تو ثابت کرو کہ ط کو

(۸ ن + ۵) $\frac{\pi}{4}$ اور (۸ ن + ۷) $\frac{\pi}{4}$

کے درمیان واقع ہونا چاہیئے جن میں ن ایک صحیح عدد ہے۔

(۲) ـ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم}\ \frac{1}{2}\ \text{ا}}{\sqrt{\text{۱} + \text{جب ا}}} + \frac{\text{جب}\ \frac{1}{2}\ \text{ا}}{\sqrt{\text{۱} - \text{جب ا}}} = \text{قط ا}$$

جس میں جذور مثبت اعداد کو تعبیر کرتے ہیں بشرطیکہ ا،

(۴ ن − $\frac{1}{2}$) π اور (۴ ن + $\frac{1}{2}$) π

کے درمیان واقع ہو جہاں ن ایک صحیح عدد ہے۔ دوسری صورتوں میں علامتیں کیا ہونی چاہئیں۔

(۳) ثابت کرو کہ $\frac{\sqrt{1-\text{جب لا}}+1}{\sqrt{1+\text{جب لا}}-1}$ کی چار قیمتیں حسب ذیل ہیں:

$$\text{مم}\ \tfrac{1}{4}\ \text{لا}،\ \text{مس}\ \tfrac{1}{4}(\pi+\text{لا})،\ -\text{مس}\ \tfrac{1}{4}\ \text{لا}،\ -\text{مم}\ \tfrac{1}{4}(\pi+\text{لا})$$

(۴) اگر جب ۲ا = ؤ تو ثابت کرو کہ مس ا کی چار قیمتیں جملہ

$$\frac{1}{\text{ؤ}}\left\{(1+\text{ؤ})^{\frac{1}{2}}-1\right\}\left\{1+(1-\text{ؤ})^{\frac{1}{2}}\right\}$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

(۵) ضابطہ $\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ا} = \pm\frac{\sqrt{1+\text{مس}^2\ \text{ا}}-1}{\text{مس ا}}$ میں ثابت کرو کہ مشتبہ علامت کی بجائے $(-1)^{\text{م}}$ رکھنے سے ابہام دور کیا جا سکتا ہے جہاں م، $\frac{\text{ا}+90^\circ}{180^\circ}$ سے عین چھوٹا ایک صحیح عدد ہے۔

دئیے ہوئے زاویے کے ایک ثلث کے دائری تفاعل

(70) ۴۴ — اگر ہم گزشتہ باب کے ضابطوں (۳۷)، (۳۸)، (۴۲) میں ا کی بجائے ⅓ عہ درج کریں تو ہمیں حسب ذیل تین مساواتیں ملتی ہیں

$$\text{جب عہ} = 3\ \text{جب}\ \tfrac{1}{3}\ \text{عہ} - 4\ \text{جب}^3\ \tfrac{1}{3}\ \text{عہ}،\quad \ldots\ldots\ (8)$$

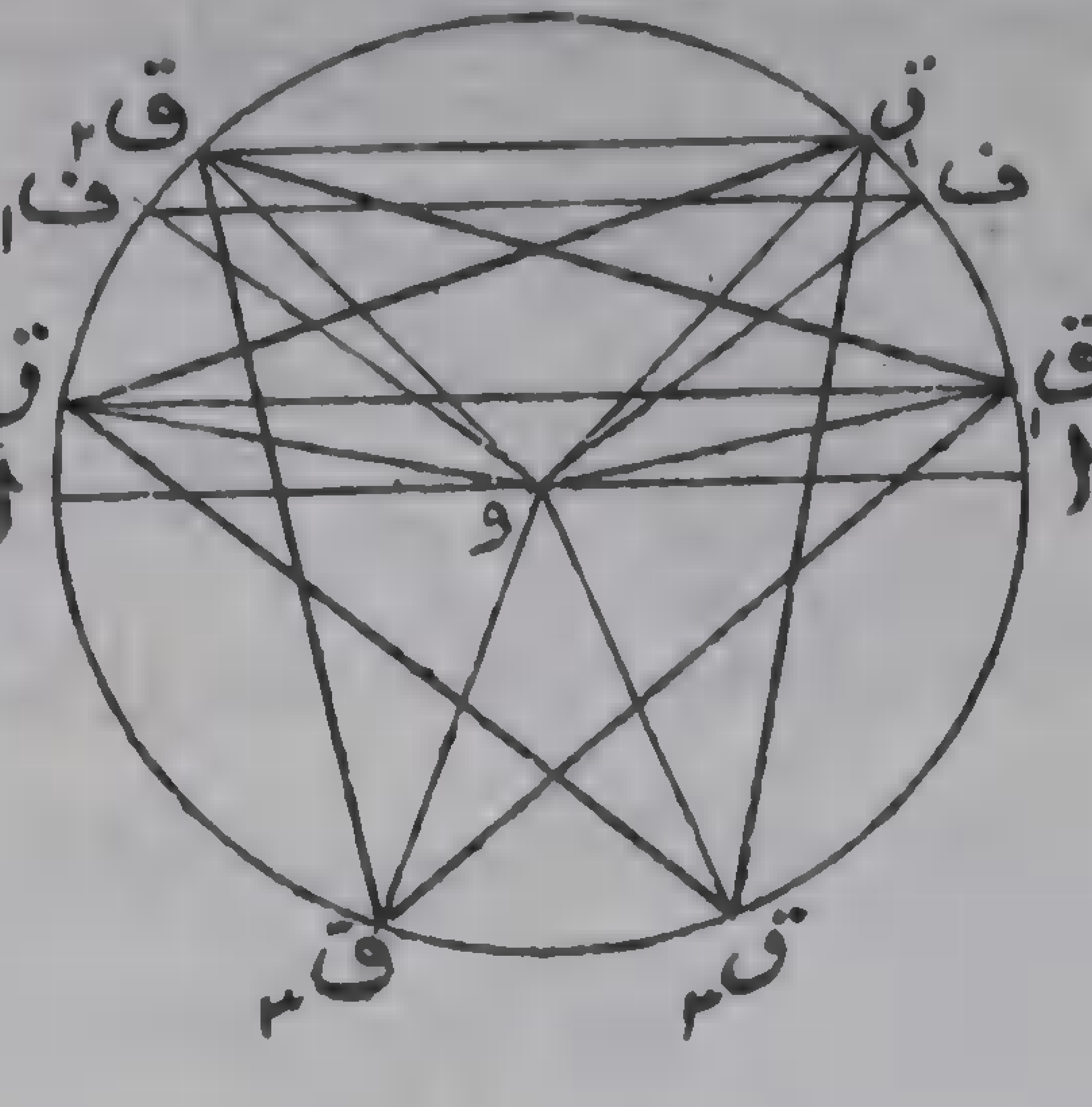
$$\text{جم عہ} = 4\ \text{جم}^3\ \tfrac{1}{3}\ \text{عہ} - 3\ \text{جم}\ \tfrac{1}{3}\ \text{عہ}،\quad \ldots\ldots\ (9)$$

$$\text{مس عہ} = \frac{3\ \text{مس}\ \tfrac{1}{3}\ \text{عہ} - \text{مس}^3\ \tfrac{1}{3}\ \text{عہ}}{1-3\ \text{مس}^2\ \tfrac{1}{3}\ \text{عہ}}،\quad \ldots\ldots\ (10)$$

اس طرح ہمیں ہر صورت میں ایک کعبی مساوات ملتی ہے جس سے ⅓ عہ کے دائری تفاعلوں کو عہ کے دائری تفاعلوں کی رقوم میں معلوم

کیا جاسکتا ہے۔ پس اگر جیب عہ دیا گیا ہے تو جیب $\frac{1}{3}$ عہ کی تین الگ الگ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں، اگر جم عہ دیا گیا ہے تو جم $\frac{1}{3}$ عہ کی تین قیمتیں الگ الگ حاصل ہوتی ہیں اور اگر مس عہ دیا گیا ہے تو مس $\frac{1}{3}$ عہ کی تین الگ الگ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

(۱) ضابطہ (۸) کی صورت میں جیب عہ دیا گیا ہے اور جیب $\frac{1}{3}$ عہ کے لئے زاویوں (و ا، و ف)، (و ا، و ف۱) میں سے سب کے ایک ثلث کی جیوب کی قیمتیں حاصل ہونگی، کیونکہ زاویہ (و ا، و ف) اور (و ا، و ف۱) کی جیب وہی ہے جو عہ کی ہے۔ فرض کرو کہ زاویوں (و ا، و ف) کی تثلیث



کرنے والے خطوط و ق۱، و ق۲، و ق۳ ہیں اور اس طرح زاویہ ق۱ و ا = $\frac{1}{3}$ عہ، اور ق۱ ق۲ ق۳ ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے اور

ق۲ و ا = $\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}$ عہ، ق۳ و ا = $\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{3}$ عہ

اسی طرح زاویوں (و ا، و ف۱) کی تثلیث کرنے والے خطوط و ق۱، و ق۲، و ق۳ ہیں اور اس طرح ق۱ ق۲ ق۳ ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے

اور ق$_1$ وا = $\frac{1}{3}$ (π − عہ) اور ق$_2$ وا = π − $\frac{1}{3}$ عہ اور ق$_3$ وا = $\frac{5}{3}$ π − $\frac{1}{3}$ عہ

ہم فوراً یہ دیکھتے ہیں کہ ق$_2$ ق$_1$، ق$_1$ ق$_2$، ق$_2$ ق$_3$ متوازی ہیں

وا کے؛ ہم اختتامی زاویوں (وا، وق$_1$) (وا، وق$_2$) کے دو جٹوں کی

جیوب، جیب $\frac{1}{3}$ عہ ہیں؛ جٹوں (وا، وق$_2$)، (وا، وق$_1$) کی جیوب، (71)

جیب ($\frac{2}{3}$ π + $\frac{1}{3}$ عہ) ہیں؛ اور (وا، وق$_3$) (وا، وق$_3$) کی جیوب،

جیب ($\frac{4}{3}$ π + $\frac{1}{3}$ عہ) ہیں۔ اسلئے جیب $\frac{1}{3}$ عہ میں جو کعبی مساوات (۸) ہے اسکی

تین اصلیں حسب ذیل ہیں:

جیب $\frac{1}{3}$ عہ، جیب ($\frac{1}{3}$ π − $\frac{1}{3}$ عہ)، اور − جیب ($\frac{1}{3}$ π + $\frac{1}{3}$ عہ)

(۲) ضابطہ (۹) کی صورت میں وہ زاویے جن کی جیب التمام وہی

ہے جو عہ کی ہے (وا، وف) اور (وا، وف$_1$) ہیں۔ فرض کرو کہ زاویوں

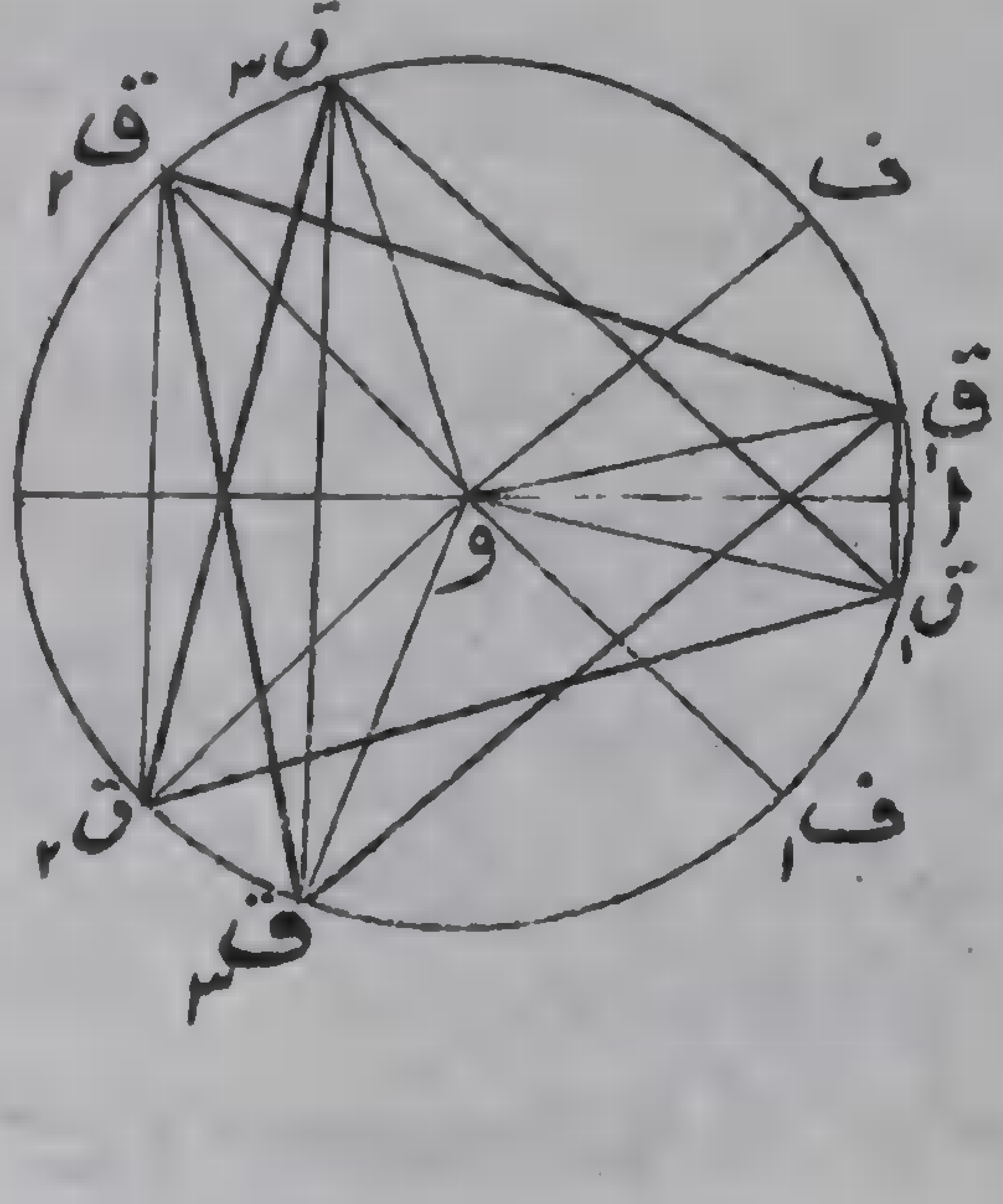
کے پہلے جٹ کی تثلیث کرنے والے خطوط وق$_1$، وق$_2$، وق$_3$ ہیں جہاں

ق$_1$ وا = $\frac{1}{3}$ عہ اور

ق$_1$ ق$_2$ ق$_3$ تساوی الاضلاع

مثلث ہے، دوسرے جٹ

کی تثلیث کرنے والے خطوط



وق$_1$، وق$_2$، وق$_3$ ہیں جہاں

ق$_1$ وا = − $\frac{1}{3}$ عہ اور

ق$_1$ ق$_2$ ق$_3$ تساوی اضلاع

مثلث ہے۔ ہم فوراً دیکھتے

ہیں کہ ق$_1$ ق$_1$، ق$_2$ ق$_2$

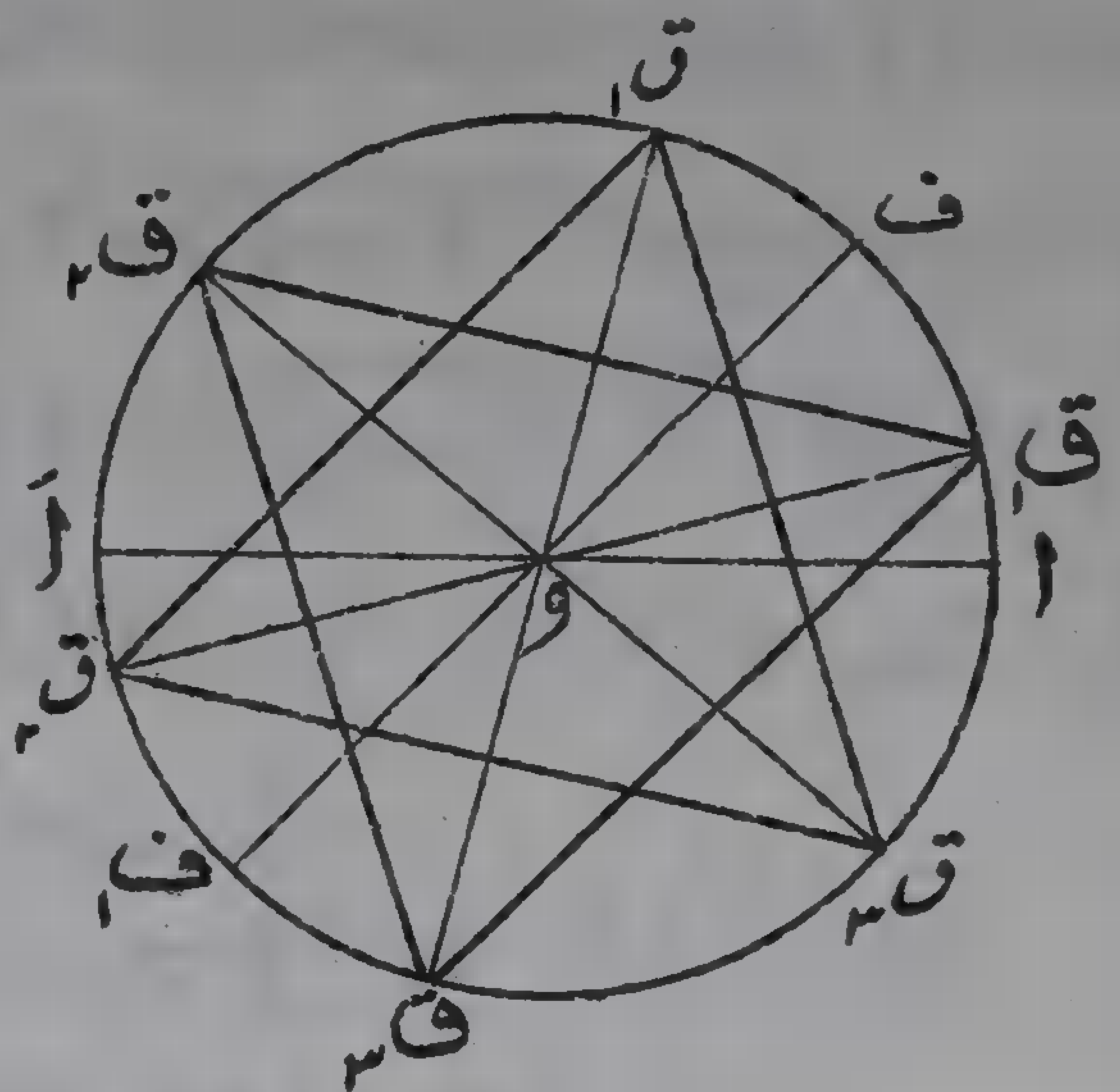
ق$_{2}$ ق$_{3}$ عمود ہیں وا پر۔ زاویوں (وا، وق$_{1}$)، (وا، وقَ$_{1}$) کے دو جٹوں کی جیوب التمام جم $\frac{1}{3}$ عہ ہیں، دو جٹوں (وا، وق$_{2}$) (وا، وقَ$_{2}$) کی جیوب التمام جم ($\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}$ عہ) ہیں، اور دو جٹوں (وا، وق$_{3}$)(وا، وقَ$_{3}$) کی جیوب التمام جم ($\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{3}$ عہ) ہیں۔ اس لئے جم $\frac{1}{3}$ عہ میں جو کعبی مساوات (۹) ہے اس کی تین اصلیں جم $\frac{1}{3}$ عہ، جم ($\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{3}$ عـــہ) اور ۔جم ($\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}$ عہ) ہیں۔

(۳) ضابطہ (۱۰) کی صورت میں وہ زاویے جن کا مماس وہی ہے جو عہ کا ہے (وا، وف) اور (وا، وف$_{1}$) ہیں۔ حسب سابق شکل صفحہ ۱۱۱ میں زاویوں کے پہلے جٹ کی تثلیث کرنے والے خطوط وق، وق$_{2}$، وق$_{3}$ ہیں اور دوسرے جٹ کی تثلیث کرنے والے وقَ$_{1}$، وقَ$_{2}$، و قَ$_{3}$ ہیں جہاں ق$_{1}$ ق$_{2}$ ق$_{3}$ ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے اور ق$_{1}$وا $= \frac{1}{3}(\pi +$ عہ$)$۔
ہم دیکھتے ہیں کہ ق$_{1}$ وقَ$_{1}$، ق$_{2}$ وقَ$_{2}$، اور ق$_{3}$ وقَ$_{3}$ دائرے کے قطر ہیں۔ جٹوں (وا، وق$_{1}$)، (وا، وقَ$_{1}$) کے مماس مس $\frac{1}{3}$ عہ ہیں؛ (وا، وق$_{2}$)، (وا، وقَ$_{2}$) کے مماس مس ($\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}$ عہ) ہیں، اور (وا، وق$_{3}$)، (وا، وق$_{1}$) کے مماس مس ($\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{3}$ عہ) ہیں۔
اس لئے مس $\frac{1}{3}$ عہ کی کعبی مساوات (۱۰) کی اصلیں مس $\frac{1}{3}$ عہ، ۔مس ($\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{3}$ عہ)، مس ($\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}$ عہ) ہیں۔

اس دفعہ کے نتیجوں کو ہم اس طرح بیان کر سکتے ہیں:۔ لا میں کعبی مساوات (72)

۳ لا − ۴ لا^{3} = جب عہ

کی اصلیں حسب ذیل ہیں:



$$\text{جب}\ \tfrac{1}{3}\text{ع}،\ \text{جب}\ \tfrac{1}{3}(\pi-\text{ع})،\ -\text{جب}\ \tfrac{1}{3}(\pi+\text{ع})\ ؛$$

کبھی مساوات

$$4\,\text{لا}^3-3\,\text{لا}=\text{جم ع}$$

کی اصلیں ہیں

$$\text{جم}\ \tfrac{1}{3}\text{ع}،\ -\text{جم}\ \tfrac{1}{3}(\pi-\text{ع})،\ -\text{جم}\ \tfrac{1}{3}(\pi+\text{ع})$$

اور کبھی مساوات

$$\text{مس ع}\,(1-3\,\text{لا}^2)=3\,\text{لا}-\text{لا}^3$$

کی اصلیں ہیں

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{3}\text{ع}،\ -\text{مس}\ \tfrac{1}{3}(\pi-\text{ع})،\ \text{مس}\ \tfrac{1}{3}(\pi+\text{ع})$$

بعض زاویوں کے دائری تفاعلوں کی تعیین

۶۵—اس باب کے ضابطے ایسے زاویوں کے دائری تفاعلوں کو معلوم کرنے میں استعمال کئے جا سکتے ہیں جو اُن زاویوں کے کسری یا تحت ضعفی ہوں جن کے دائری تفاعل معلوم ہیں۔

(۱) چونکہ $\text{جب}\ \tfrac{1}{4}\pi=\text{جم}\ \tfrac{1}{4}\pi=\frac{1}{\sqrt{2}}$

اس لئے دفعہ ۵۰ کے ضابطوں (۱) اور (۲) کی رو سے

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{8}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\ ,\quad \text{جم}\ \tfrac{1}{8}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\ ,$$

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{16}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ ,\quad \text{جم}\ \tfrac{1}{16}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

اور اسی طرح عمل کو جاری رکھنے سے ہم جب $\frac{1}{2^n}\pi$ اور جم $\frac{1}{2^n}\pi$ کو محسوب کرسکتے ہیں۔

(۲) چونکہ $\text{جب}\ \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2}\ ,\quad \text{جم}\ \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$

اس لئے ضابطوں (۵) اور (۶) کی رو سے

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{12}\pi = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\ ,\quad \text{جم}\ \tfrac{1}{12}\pi = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

یہ قیمتیں جب ۱۵°، جم ۱۵° کے لئے دفعہ ۴۴ میں حاصل کی ہوئی قیمتوں کے مطابق ہیں۔ پس عمل کو اسی طرح جاری رکھنے سے ہم تمام زاویوں $\frac{\pi}{3\times 2^n}$ کی جیوب اور جیوب التمام محسوب کرسکتے ہیں۔

(۳) — چونکہ $\text{جب}\ \tfrac{1}{5}\pi = 2\ \text{جب}\ \tfrac{1}{10}\pi\ \text{جم}\ \tfrac{1}{10}\pi$ (73)

اور $\text{جب}\ \tfrac{2}{5}\pi = 2\ \text{جب}\ \tfrac{1}{5}\pi\ \text{جم}\ \tfrac{1}{5}\pi$

اس لئے $\text{جب}\ \tfrac{1}{5}\pi\ \text{جب}\ \tfrac{2}{5}\pi = 4\ \text{جب}\ \tfrac{1}{5}\pi\ \text{جم}\ \tfrac{1}{5}\pi\ \text{جب}\ \tfrac{1}{10}\pi\ \text{جم}\ \tfrac{1}{10}\pi$ ؛

اب چونکہ $\text{جب}\ \tfrac{2}{5}\pi = \text{جم}\ \tfrac{1}{10}\pi$ ،

اس لئے $4\ \text{جم}\ \tfrac{1}{5}\pi\ \text{جب}\ \tfrac{1}{10}\pi = 1$ ،

یا $\text{جب}\ \tfrac{3}{10}\pi - \text{جب}\ \tfrac{1}{10}\pi = \tfrac{1}{2}$ ،

یعنی $\text{جم}\ \tfrac{1}{5}\pi - \text{جب}\ \tfrac{1}{10}\pi = \tfrac{1}{2}$ ،

نیز $(\text{جم}\ \tfrac{۱}{۵}\pi + \text{جب}\ \tfrac{۱}{۱۰}\pi)^{۲} = \tfrac{۱}{۴} + ۱ = \tfrac{۵}{۴}$ ؛

اس لیے $\text{جم}\ \tfrac{۱}{۵}\pi + \text{جب}\ \tfrac{۱}{۱۰}\pi = \tfrac{۱}{۲}\sqrt{۵}$

یا $\text{جب}\ \tfrac{۱}{۱۰}\pi = \tfrac{۱}{۴}(\sqrt{۵} - ۱)$، $\text{جم}\ \tfrac{۱}{۵}\pi = \tfrac{۱}{۴}(\sqrt{۵} + ۱)$

اور اس لیے $\text{جم}\ \tfrac{۱}{۱۰}\pi = \tfrac{۱}{۴}\sqrt{۱۰ + ۲\sqrt{۵}}$، $\text{جب}\ \tfrac{۱}{۵}\pi = \tfrac{۱}{۴}\sqrt{۱۰ - ۲\sqrt{۵}}$ ؛

یہ قیمتیں دفعہ ۳۴ میں دی ہوئی قیمتوں کے مطابق ہیں۔

یہ امر توجہ طلب ہے کہ اگر ع کوئی زاویہ ہو جس کی جیب اور جیب التمام معلوم ہے اور م اور ن مثبت صحیح عدد ہوں تو شکل $\frac{\text{م ع}}{۲^{\text{ن}}}$ کے تمام زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام ایسی شکل میں معلوم کی جا سکتی ہیں جس میں صرف جذروں کے نکالنے کا عمل شامل ہوتا ہے، کیونکہ ہم نے یہ دکھا دیا ہے کہ شکل $\frac{\text{ع}}{۲^{\text{ن}}}$ کے تمام زاویوں کے دائری تفاعل کس طرح معلوم کیے جا سکتے ہیں اور جب یہ معلوم ہو جائیں تو گزشتہ باب کے ضابطوں کی مدد سے جب $\frac{\text{م ع}}{۲^{\text{ن}}}$ اور جم $\frac{\text{م ع}}{۲^{\text{ن}}}$ معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

۶۶۔ اب ہم ۳° سے شروع کر کے ۹۰° تک اُن تمام زاویوں کے دائری تفاعل معلوم کر سکتے ہیں جن کا فرق ۳° یا $\frac{\pi}{۶۰}$ ہے۔ چنانچہ

$$\text{جب}\ ۳^\circ = \text{جب}\ (۱۸^\circ - ۱۵^\circ)$$
$$= \text{جب}\ ۱۸^\circ\ \text{جم}\ ۱۵^\circ - \text{جم}\ ۱۸^\circ\ \text{جب}\ ۱۵^\circ$$
$$= \tfrac{۱}{۱۶}(\sqrt{۶} + \sqrt{۲})(\sqrt{۵} - ۱) - \tfrac{۱}{۸}(\sqrt{۳} - ۱)\sqrt{۵ + \sqrt{۵}}$$

اسی طرح $\text{جم}\ ۳^\circ = \tfrac{۱}{۸}(\sqrt{۳} + ۱)\sqrt{۵ + \sqrt{۵}} + \tfrac{۱}{۱۶}(\sqrt{۶} - \sqrt{۲})(\sqrt{۵} - ۱)$

نیز چونکہ

$۶^\circ = ۳۶^\circ - ۳۰^\circ$ ، $۹^\circ = ۴۵^\circ - ۳۶^\circ$ ، $۱۲^\circ = ۳۰^\circ - ۱۸^\circ$ ،

$۲۱° = ۳۶° - ۱۵°$ ، $۲۴° = ۴۵° - ۲۱°$ ، $۲۷° = ۳۰° - ۳°$ ،
$۳۳° = ۴۵° - ۱۲°$ ، $۳۹° = ۴۵° - ۶°$ ، $۴۲° = ۴۵° - ۳°$ ،

اس لیے ہم زاویوں $۳°$ ، $۶°$ ، ...... ، $۴۵°$ کی جیوب التمام محسوب کر سکتے ہیں ۔ اِس سے آگے بڑھنا غیر ضروری ہے کیونکہ $۴۵°$ سے بڑے کسی زاویے کی جیب یا جیب التمام اس کے متمم کی جیب التمام یا جیب کے مساوی ہوتی ہے اور یہ متمم زاویہ $۴۵°$ سے کم ہوتا ہے۔ محسوب کردہ نتیجوں کی فہرست جدول ذیل میں دی گئی ہے۔

(۷۴)

جیب

$۳° = \frac{۱}{۶۰}\pi$	$\frac{۱}{۱۶}\left\{(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})(\sqrt{۵}-۱) - ۲(\sqrt{۳}-۱)\sqrt{۵+\sqrt{۵}}\right\}$
$۶° = \frac{۱}{۳۰}\pi$	$\frac{۱}{۸}\left(\sqrt{۳۰-۶\sqrt{۵}} - \sqrt{۵} - ۱\right)$
$۹° = \frac{۱}{۲۰}\pi$	$\frac{۱}{۸}\left(\sqrt{۱۰}+\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۵-\sqrt{۵}}\right)$
$۱۲° = \frac{۱}{۱۵}\pi$	$\frac{۱}{۸}\left(\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}} - \sqrt{۱۵} + \sqrt{۳}\right)$
$۱۵° = \frac{۱}{۱۲}\pi$	$\frac{۱}{۴}\left(\sqrt{۶} - \sqrt{۲}\right)$
$۱۸° = \frac{۱}{۱۰}\pi$	$\frac{۱}{۴}\left(\sqrt{۵} - ۱\right)$
$۲۱° = \frac{۷}{۶۰}\pi$	$\frac{۱}{۱۶}\left\{۲(\sqrt{۳}+۱)\sqrt{۵-\sqrt{۵}} - (\sqrt{۶}-\sqrt{۲})(۱+\sqrt{۵})\right\}$
$۲۴° = \frac{۲}{۱۵}\pi$	$\frac{۱}{۸}\left(\sqrt{۱۵}+\sqrt{۳} - \sqrt{۱۰-۲\sqrt{۵}}\right)$
$۲۷° = \frac{۳}{۲۰}\pi$	$\frac{۱}{۸}\left(۲\sqrt{۵+\sqrt{۵}} - \sqrt{۱۰} + \sqrt{۲}\right)$
$۳۰° = \frac{۱}{۶}\pi$	$\frac{۱}{۲}$
$۳۳° = \frac{۱۱}{۶۰}\pi$	$\frac{۱}{۱۶}\left\{(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})(\sqrt{۵}-۱) + ۲(\sqrt{۳}-۱)\sqrt{۵+\sqrt{۵}}\right\}$

$36^\circ = \frac{1}{5}\pi$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
$39^\circ = \frac{13}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\left\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}\right\}$
$42^\circ = \frac{7}{30}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right)$
$45^\circ = \frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$48^\circ = \frac{4}{15}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)$
$51^\circ = \frac{17}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\left\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)\right\}$
$54^\circ = \frac{3}{10}\pi$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$
$57^\circ = \frac{19}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\left\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\right\}$
$60^\circ = \frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$63^\circ = \frac{7}{20}\pi$	$\frac{1}{8}\left(2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$
$66^\circ = \frac{11}{30}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1\right)$
$69^\circ = \frac{23}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\left\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)+2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}\right\}$
$72^\circ = \frac{2}{5}\pi$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
$75^\circ = \frac{5}{12}\pi$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
$78^\circ = \frac{13}{30}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right)$
$81^\circ = \frac{19}{20}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}+2\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$
$84^\circ = \frac{7}{15}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{15}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\right)$
$87^\circ = \frac{29}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\left\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\right\}$
(75) $90^\circ = \frac{1}{2}\pi$	1

اس جدول میں زاویوں °۳، °۶، ....، °۹۰ کی جیوب دی گئی ہیں۔

اور متمم زاویوں کی جیوب لینے سے جیوب التمام معلوم ہو سکتی ہیں - اوپر کے جملوں میں جو اعداد مجذور ہیں اُن کی قیمتیں اعشاریہ کے ۲۴ مقامات تک مسٹر پی - گرے نے (میسنجر آف میتھیماٹکس جلد ششم) میں دی ہیں - ہٹن کی جدولوں میں اِن کی قیمتیں اعشاریہ کے ۱۰ مقامات تک دی گئی ہیں - مکمل جدول جس میں اِن زاویوں کے مماس قاطع، قاطع التمام منطق نسب نما والی کسروں کی شکل میں درج ہیں گیلن (Gelin) کی کتاب ٹرگنومیٹری میں ملے گی -

پانچویں باب پر مثالیں

امثلہ ۱ تا ۸ کے رشتے ثابت کرو جن میں ا + ب + ج = ۱۸۰°

(۱) $$\frac{\text{مس } \tfrac{1}{2}\text{ ا}}{\text{مس } \tfrac{1}{2}\text{ ج}} = \frac{1 - \text{جم ا} + \text{جم ب} + \text{جم ج}}{1 - \text{جم ج} + \text{جم ا} + \text{جم ب}}$$

(۲) $$\text{جب (ا - ب) جب (ا - ج)} + \text{جب (ب - ج) جب (ب - ا)} + \text{جب (ج - ا)} \times \text{جب (ج - ب)} = 2\,\text{جم } \tfrac{1}{2}\text{(ب - ج) جم } \tfrac{1}{2}\text{(ج - ا)} \times \text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ (ا - ب)} - 2\,\text{جب } \tfrac{3}{2}\text{ ا جب } \tfrac{3}{2}\text{ ب جب } \tfrac{3}{2}\text{ ج}$$

(۳) $$\text{جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{ ا} + \text{جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{ ب} + \text{جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{ ج} + 2\,\text{جم ا جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{ ب جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{ ج} + 2\,\text{جم ب جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{ ج جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{ ا} + 2\,\text{جم ج جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{ ا جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{ ب} = 8\,\text{جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{ ا جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{ ب جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{ ج}$$

(۴) $$\Sigma\,\text{جب}^3\text{ ا} = 3\,\text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ ا جم } \tfrac{1}{2}\text{ ب جم } \tfrac{1}{2}\text{ ج} + \text{جم } \tfrac{3}{2}\text{ ا جم } \tfrac{3}{2}\text{ ب جم } \tfrac{3}{2}\text{ ج}$$

(۵) $$\Sigma\,\text{قم ا (1 + قم ب قم ج)}$$
$$= \text{قم ا قم ب قم ج} \left\{4\,\text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ (ب - ج) جم } \tfrac{1}{2}\text{ (ج - ا) جم } \tfrac{1}{2}\text{ (ا - ب)} - 1\right\}$$

(۶) $\sum \text{قم ا}\left(\text{۱ - مم ب مم ج}\right)$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{قط}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا قط}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ب قط}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج + قم ا قم ب قم ج}$$

(۷) $\sum \text{جب ۲ ا جب (ب - ج)}$

$$= \text{۱۶ جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ب جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج جب}\,\tfrac{1}{2}\text{(ب - ج) جب}\,\tfrac{1}{2}\text{(ج - ا) جب}\,\tfrac{1}{2}\text{(ا - ب)}$$

(۸) $$\frac{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا - جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ب + جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج}}{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ب + جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج - جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا}} = \frac{\text{۱ + مس}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا}}{\text{۱ + مس}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ب}}$$

(۹) ثابت کرو متماثلہ

$$\frac{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\text{(ب - ج)}}{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\text{(ب + ج)}} + \frac{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\text{(ج - ا)}}{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\text{(ج + ا)}} + \frac{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\text{(ا - ب)}}{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\text{(ا + ب)}}$$
$$+ \frac{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\text{(ب - ج) جب}\,\tfrac{1}{2}\text{(ج - ا) جب}\,\tfrac{1}{2}\text{(ا - ب)}}{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\text{(ب + ج) جب}\,\tfrac{1}{2}\text{(ج + ا) جب}\,\tfrac{1}{2}\text{(ا + ب)}} = ۰$$

(۱۰) اگر $\text{ا + ب + ج} = ۳۶۰^\circ$ اور اگر

$$\text{جم ا} = \frac{\text{(د - ا)(ب - ج)}}{\text{(د + ا)(ب + ج)}},\ \text{جم ب} = \frac{\text{(د - ب)(ج - ا)}}{\text{(د + ب)(ج + ا)}},\ \text{جم ج} = \frac{\text{(د - ج)(ا - ب)}}{\text{(د + ج)(ا + ب)}}$$

تو

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا + مس}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ب + مس}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج} = \pm ۱$$

(۱۱) ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{(لا + ما) مس}\,\tfrac{1}{2}\text{(لا - ما)} = \frac{\text{قم ۲ لا قم ما - قم ۲ ما قم لا}}{\text{قم ۲ لا قم ما + قم ۲ ما قم لا}}$$

(۱۲) اگر $\text{مم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ + مم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ہ} = \text{۲ مم طہ}$ تو ثابت کرو کہ (76)

$$\left\{\text{۱ - ۲ قط طہ جم (عہ - طہ) + قط}^{۲}\,\text{طہ}\right\}\left\{\text{۱ - ۲ قط طہ جم (ہ - طہ) + قط}^{۲}\,\text{طہ}\right\} = \text{مس}^{۴}\,\text{طہ}$$

(۱۳) اگر ا + ب + ج + د = ۳۶۰° تو ثابت کرو کہ

جم $\frac{1}{2}$ ا جم $\frac{1}{2}$ د جب $\frac{1}{2}$ ب جب $\frac{1}{2}$ ج - جم $\frac{1}{2}$ ب جم $\frac{1}{2}$ ج جب $\frac{1}{2}$ ا جب $\frac{1}{2}$ د

= جب $\frac{1}{2}$ (ا + ب) جب $\frac{1}{2}$ (ا + ج) جم $\frac{1}{2}$ (ا + د)

(۱۴) ثابت کرو کہ

جب^{2} $\frac{1}{2}$ (ب - ج) + جب^{2} $\frac{1}{2}$ (ج - ا) جب^{2} $\frac{1}{2}$ (ا - ب)

+ ۲ جم $\frac{1}{2}$ (ب - ج) جم $\frac{1}{2}$ (ج - ا) جم $\frac{1}{2}$ (ا - ب) = ۲

(۱۵) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب (ما - ی) + جب (ی - لا) + جب (لا - ما)}}{\text{۱ + جم (ما - ی) + جم (ی - لا) + جم (لا - ما)}}$$

= - مس $\frac{1}{2}$ (ما - ی) مس $\frac{1}{2}$ (ی - لا) مس $\frac{1}{2}$ (لا - ما)

(۱۶) دریافت کرو کہ عہ، بہ، جہ میں کیا رشتہ ہونا چاہیئے کہ

جم عہ + جم بہ + جم جہ = ۱ + ۴ جب $\frac{1}{2}$ عہ جب $\frac{1}{2}$ بہ جب $\frac{1}{2}$ جہ

(۱۷) اگر ا + ب + ج + د = ۳۶۰° تو ثابت کرو کہ

جم (ب + ج + د) + جم (ج + د + ا) + جم (د + ا + ب) + جم (ا + ب + ج)

= - ۴ جم $\frac{1}{2}$ (ا + ب) جم $\frac{1}{2}$ (ا + ج) جم $\frac{1}{2}$ (ا + د)

(۱۸) اگر مس $\frac{1}{2}$ ط = مس^{3} $\frac{1}{2}$ فہ اور مس فہ = ۲ مس عہ

تو ثابت کرو کہ ط + فہ = ۲ عہ

(۱۹) اگر جب^{2} سہ = $\frac{\text{جب س جب (س - ط) جب (س - فہ) جب (س - پہ)}}{\text{۴ جم}^{2}\ \frac{1}{2}\ \text{ط جم}^{2}\ \frac{1}{2}\ \text{فہ جم}^{2}\ \frac{1}{2}\ \text{پہ}}$

تو ثابت کرو کہ

مس^{2} $\frac{1}{2}$ سہ = مس $\frac{1}{2}$ س مس $\frac{1}{2}$ (س - ط) مس $\frac{1}{2}$ (س - فہ) مس $\frac{1}{2}$ (س - پہ)

جہاں ۲ س = ط + ف + ی

(۲۰) اگر ا + ب + ج + د = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

جب ا + جب ب + جب ج - جب د

= ۴ جم ½ (ا + د) جم ½ (ب + د) جم ½ (ج + د)

(۲۱) اگر عہ + بہ + جہ = ۲ π تو ثابت کرو کہ

جب بہ (۱ + ۲ جم جہ) + جب جہ (۱ + ۲ جم عہ) + جب عہ (۱ + ۲ جم بہ)

= ۴ جب ½ (جہ - بہ) جب ½ (عہ - جہ) جب ½ (بہ - عہ)

(۲۲) اگر ۲ س = ا + ب + ج تو ثابت کرو کہ

جم ½ س جم ½ (س - ا) جم ½ (س - ب) جم ½ (س - ج)

+ جب ½ س جب ½ (س - ا) جب ½ (س - ب) جب ½ (س - ج)

= جم ½ ا جم ½ ب جم ½ ج

(۲۳) اگر عہ + بہ + جہ = ½ π تو

[(۱ - مس ½ عہ)(۱ - مس ½ بہ)(۱ - مس ½ جہ)] ÷ [(۱ + مس ½ عہ)(۱ + مس ½ بہ)(۱ + مس ½ جہ)] = [جب عہ + جب بہ + جب جہ - ۱] ÷ [جم عہ + جم بہ + جم جہ]

(۲۴) اگر عہ + بہ + جہ = π تو ثابت کرو کہ

جم (۳/۲ بہ + جہ - ۲ عہ) + جم (۳/۲ جہ + عہ - ۲ بہ) + جم (۳/۲ عہ + بہ - ۲ جہ)

= ۴ جم ¼ (۵ عہ - ۲ بہ - جہ) جم ¼ (۵ بہ - ۲ جہ - عہ) جم ¼ (۵ جہ - ۲ عہ - بہ)

(۲۵) اگر جم² ط = جم عہ ÷ جم بہ ، جم² طَ = جم عہَ ÷ جم بہ

اور مس ط ÷ مس طَ = مس عہ ÷ مس عہَ

تو ثابت کرو کہ مس ½ عہ مس ½ عہَ = ± مس ½ بہ

(۶۶)

(۲۶) اگر جم عہ = جم بہ جم فہ = جم بَہ جم فَہ اور جب عہ = ۲ جب $\frac{۱}{۲}$ فہ جب $\frac{۱}{۲}$ فَہ
تو ثابت کرو کہ ± مس $\frac{۱}{۲}$ عہ = مس $\frac{۱}{۲}$ بہ مس $\frac{۱}{۲}$ بَہ

(۲۷) اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° اور مس $\frac{۳}{۴}$ ا مس $\frac{۳}{۴}$ ب = مس $\frac{۳}{۴}$ ج تو ثابت کرو کہ

مس $\frac{۳}{۴}$ ا + مس $\frac{۳}{۴}$ ب + مس $\frac{۳}{۴}$ ج = مم $\frac{۳}{۴}$ ا + مم $\frac{۳}{۴}$ ب + مم $\frac{۳}{۴}$ ج

(۲۸) اگر مس $\frac{۱}{۲}$ (ما + ی) + مس $\frac{۱}{۲}$ (ی + لا) + مس $\frac{۱}{۲}$ (لا + ما) = ۰
تو ثابت کرو کہ جب لا + جب ما + جب ی + ۳ جب (لا + ما + ی) = ۰

(۲۹) ثابت کرو کہ

جم عہ جب $\frac{۱}{۲}$ (ط + عہ) جب $\frac{۱}{۲}$ (بہ − جہ) + جم بہ جب $\frac{۱}{۲}$ (ط + بہ) جب $\frac{۱}{۲}$ (جہ − عہ)
+ جم جہ جب $\frac{۱}{۲}$ (ط + جہ) جب $\frac{۱}{۲}$ (عہ − بہ)
= ۲ جب $\frac{۱}{۲}$ (بہ − جہ) جب $\frac{۱}{۲}$ (جہ − عہ) جب $\frac{۱}{۲}$ (عہ − بہ) جب $\frac{۱}{۲}$ (عہ + بہ + جہ + ط)

(۳۰) حل کرو مساواتیں

مس $\frac{۱}{۲}$ عہ + مس $\frac{۱}{۲}$ بہ = $\frac{۱}{۳}$
مس عہ + مس بہ = $\frac{۳}{۴}$

(۳۱) اگر $\frac{\text{جب (فہ + عہ) جب (فہ − عہ)}}{\text{جب } \left(\frac{\text{عہ + بہ}}{۲} + ۲ \text{ ط}\right)} = \frac{\text{جب (فہ + بہ) جب (فہ − بہ)}}{\text{جب } \left(\frac{\text{عہ + بہ}}{۲} - ۲ \text{ ط}\right)}$ = جب $\frac{۱}{۲}$ (بہ − عہ)

تو ثابت کرو کہ جم² $\frac{۱}{۲}$ عہ + جم² $\frac{۱}{۲}$ جہ − جم² ط = $\frac{۱}{۲}$

(۳۲) اگر مس ($\frac{۱}{۴}$ π + $\frac{۱}{۲}$ ط) = مس^۵ ($\frac{۱}{۴}$ π + $\frac{۱}{۲}$ فہ) تو ثابت کرو کہ

جب ط = ۵ جب فہ $\frac{\text{(۱ + عہ² جب² فہ) (۱ + بہ² جب² فہ)}}{\text{(۱ + عہ⁴ جب² فہ) (۱ + بہ² جب² فہ)}}$

اور عہ، بہ معلوم کرو۔

(۳۳) اگر عہ + بہ + جہ = π تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1}\left(\text{مس}\tfrac{1}{2}\text{بہ مس}\tfrac{1}{2}\text{جہ}\right)+\text{مس}^{-1}\left(\text{مس}\tfrac{1}{2}\text{جہ مس}\tfrac{1}{2}\text{عہ}\right)+\text{مس}^{-1}\left(\text{مس}\tfrac{1}{2}\text{عہ مس}\tfrac{1}{2}\text{بہ}\right)$$

$$=\text{مس}^{-1}\left\{1+\frac{8\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{عہ جب}\tfrac{1}{2}\text{بہ جب}\tfrac{1}{2}\text{جہ}}{\text{جب}^{2}\text{عہ}+\text{جب}^{2}\text{بہ}+\text{جب}^{2}\text{جہ}}\right\}$$

(۳۴) ثابت کرو کہ تین مقداروں

$$\frac{\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{جہ}-\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{بہ}}{\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{بہ جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{جہ}+\text{جب}^{2}\tfrac{1}{2}\text{بہ جب}^{2}\tfrac{1}{2}\text{جہ}}\text{، }\frac{\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{عہ}-\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{جہ}}{\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{عہ جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{جہ}+\text{جب}^{2}\tfrac{1}{2}\text{عہ جب}^{2}\tfrac{1}{2}\text{جہ}}$$

$$\frac{\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{بہ}-\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{عہ}}{\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{بہ جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{عہ}+\text{جب}^{2}\tfrac{1}{2}\text{بہ جب}^{2}\tfrac{1}{2}\text{عہ}}$$

کا حاصل جمع ان کے مسلسل حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

(۳۵) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{بہ}+\text{جہ})}{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{بہ}-\text{جہ})}+\frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{جہ}+\text{عہ})}{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{جہ}-\text{عہ})}+\frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{عہ}+\text{بہ})}{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})}$$

$$-\frac{3\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{بہ}+\text{جہ})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{جہ}+\text{عہ})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{عہ}+\text{بہ})}{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{بہ}-\text{جہ})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{جہ}-\text{عہ})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})}$$

$$=\frac{\text{جم عہ جم بہ جم جہ}-\text{جم}(\text{عہ}+\text{بہ}+\text{جہ})}{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{بہ}-\text{جہ})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{جہ}-\text{عہ})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})}$$

(۳۶) اگر

$$\frac{\text{جم عہ}+\text{جم بہ}+\text{جم جہ}}{\text{جم}(\text{عہ}+\text{بہ}+\text{جہ})}=\frac{\text{جب عہ}+\text{جب بہ}+\text{جب جہ}}{\text{جب}(\text{عہ}+\text{بہ}+\text{جہ})}$$

تو ثابت کرو کہ ہر کسر

جم (ب + ج) + جم (ج + ع) + جم (ع + ب)

کے مساوی ہے اور نیز

{مس ع − مس ½ (ب + ج)} \ {مس ع + مس ½ (ب + ج)}

کے مساوی ہے۔

(78)

چھٹا باب

مختلف مسئلے

۶۷ - اس باب میں ہم اُن جملوں کو مستحیل کرنے کی مختلف مثالیں دینگے جن میں دائری تفاعل شامل ہوتے ہیں۔ اِن میں سے بعض مسئلے خود دلچسپ ہیں اور باقی دوسرے اُن طریقوں کی خاطر دیے گئے ہیں جو انھیں ثابت کرنے میں استعمال ہوئے ہیں۔ اِن جملوں کو جن میں دائری تفاعل شامل ہوتے ہیں مستحیل کرنے میں مہارت صرف بہت مشق سے ہی پیدا ہوسکتی ہے، تاہم اُن طریقوں کا احتیاط سے مطالعہ کرنے سے، جو ہم نے مختلف صورتوں میں استعمال کیے ہیں طالب علم کو اس قسم کے تفاعلوں کے برتنے کی قابلیت حاصل کرنے میں بہت مدد ملے گی۔

متماثلات اور استحالات

۶۸ -

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ

جب ۲ عہ جب (بہ - جہ) + جب ۲ بہ جب (جہ - عہ) + جب ۲ جہ جب (عہ - بہ)

= {جب (بہ + جہ) + جب (جہ + عہ) + جب (عہ + بہ)} ×

{جب (جہ - بہ) + جب (بہ - عہ) + جب (عہ - جہ)}

اس مساوات کی بائیں جانب جو اجزائے ضربی ہیں وہ علی الترتیب دو مقداروں جب جہ جم بہ + جب عہ جم جہ + جب بہ جم عہ اور جم جہ جب بہ + جم عہ جب جہ + جم بہ جب عہ کے حاصل جمع اور حاصل تفریق کے مساوی ہیں؛ اس لیے ان اجزائے ضربی کا حاصل ضرب

(جب جہ جم بہ + جب بہ جم عہ + جب عہ جم جہ)² - (جم جہ جب بہ + جم بہ جب عہ + جم عہ جب جہ)² کے مساوی ہے۔ اب چونکہ جب² جہ جم² بہ - جم² جہ جب² بہ = جب² جہ - جب² بہ اس لیے مربع ارقام کا جبری مجموعہ صفر ہے؛ باقی رقمیں

= ۲ جب عہ جم عہ (جب بہ جم جہ - جم بہ جب جہ) + ۲ جب بہ جم بہ (جب جہ جم عہ - جم جہ جب عہ) + ۲ جب جہ جم جہ (جب عہ جم بہ - جم عہ جب بہ)

= جب ۲ عہ جب (بہ - جہ) + جب ۲ بہ جب (جہ - عہ) + جب ۲ جہ جب (عہ - بہ)؛ اس طرح متماثلہ

Σ جب ۲ عہ جب (بہ - جہ) = Σ جب (بہ + جہ) Σ جب (جہ - بہ)

ثابت ہو چکی۔

(۲) پچھلی مثال میں عہ، بہ، جہ کی بجائے علی الترتیب ½ π + عہ، ½ π + بہ، ½ π + جہ رکھو تو متماثلہ ذیل حاصل ہوگی :- (79)

Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) = Σ جم (بہ + جہ) Σ جب (جہ - بہ)

(۳) ثابت کرو کہ

Σ جب³ عہ جب (بہ - جہ) = - جب (عہ + بہ + جہ) جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

اس صورت میں بہت سی دیگر صورتوں کی طرح ہم مساوات کی دائیں جانب کی مقداروں جب³ عہ، جب³ بہ کی بجائے ان کے مماثل ضعفی زاویوں کی جیوب کی رقوم میں جو جملے ہیں اُن کو رکھتے ہیں؛ تب دائیں جانب کا جملہ

رہو جاتا ہے

۳/۴ Σ جب عہ جب (بہ - جہ) - ۱/۴ Σ جب ۳ عہ جب (بہ - جہ)

یا - ۱/۴ Σ جب ۳ عہ جب (بہ - جہ)، بموجب مثال (۳) دفعہ ۴۵-

اب ہم جیوب کے حاصل ضربوں کی بجائے جیوب التمام کے فرق رکھتے ہیں تو جملہ ہو جاتا ہے

۱/۸ {جم (۳ عہ + بہ - جہ) - جم (۳ عہ - بہ + جہ) + جم (۳ بہ + جہ - عہ)

- جم (۳ بہ - جہ + عہ) + جم (۳ جہ + عہ - بہ) - جم (۳ جہ - عہ + بہ) }

اور خطوط وحدانی کے اندر پہلی اور آخری رقموں کا مجموعہ ہے

۲ جب ۲ (جہ - عہ) جب (عہ + بہ + جہ)

اسی طرح دوسری اور تیسری رقموں، چوتھی اور پانچویں رقموں کو ایک ساتھ لینے سے جملہ بالا ہو جاتا ہے

- ۱/۴ جب (عہ + بہ + جہ) Σ جب ۲ (جہ - عہ)

یا - جب (عہ + بہ + جہ) جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

بموجب مثال (۳) دفعہ ۴۷-

(۴) ثابت کرو کہ

Σ جم^۳ عہ جب (بہ - جہ) = جم (عہ + بہ + جہ) جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

(۵) ثابت کرو کہ

Σ جب^۳ عہ جب^۳ (بہ - جہ) = ۳ جب عہ جب بہ جب جہ جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

مطلوبہ نتیجہ اس امر واقعہ سے مستنبط ہوگا کہ لا^۳ + ما^۳ + ی^۳ - ۳ لا ما ی کا ایک جزو ضربی لا + ما + ی ہے-

رکھو لا = جب عہ جب (بہ - جہ)، ما = جب بہ جب (جہ - عہ)، ی = جب جہ جب (عہ - بہ)

تو لا + ما + ی = ۰

(۶) ثابت کرو کہ

جب (عہ + بہ) جب (عہ - بہ) جب (جہ + ضہ) جب (جہ - ضہ) + جب (بہ + جہ) جب (بہ - جہ)
× جب (عہ + ضہ) جب (عہ - ضہ) + جب (جہ + عہ) جب (جہ - عہ) جب (بہ + ضہ) جب (بہ - ضہ) = ۰

جملہ (لا² - ما²) (ی² - و²) + (ما² - ی²) (لا² - و²) + (ی² - لا²) (ما² - و²)

متماثلاً صفر ہوتا ہے۔ پس رکھو لا = جب عہ، ما = جب بہ، ی = جب جہ، و = جب ضہ تو چونکہ

جب² عہ - جب² بہ = جب (عہ + بہ) جب (عہ - بہ)

اس لیے مسئلہ بالا حاصل ہو جاتا ہے۔

(۷) ثابت کرو کہ

۲ (جم بہ جم جہ - جم عہ) (جم جہ جم عہ - جم بہ) (جم عہ جم بہ - جم جہ) +
جب² عہ جب² بہ جب² جہ - جب² عہ (جم بہ جم جہ - جم عہ)² - جب² بہ (جم جہ جم عہ - جم بہ)²
- جب² جہ (جم عہ جم بہ - جم جہ)² = (۱ - جم² عہ - جم² بہ - جم² جہ + ۲ جم عہ جم بہ جم جہ)² (80)

یہ مسئلہ اخذ ہوتا ہے اس مشہور مسئلہ سے کہ مقطع

ا	ھ	گ
ھ	ب	ف
گ	ف	ج

کا مربع

ب ج - ف²	ف گ - ج ھ	ف ھ - ب گ
ف گ - ج ھ	ج ا - گ²	گ ھ - ا ف
ف ھ - ب گ	گ ھ - ا ف	ا ب - ھ²

رکھو ا = ب = ج = ۱، ف = جم عہ، گ = جم بہ، ھ = جم جہ تو
ب ج - ف² = جب² عہ، وغیرہ

پھر مقطع کو پھیلاؤ تو مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوگا۔

(۸) ثابت کرو کہ

جم ۲ عہ مم ½ (جہ - عہ) مم ½ (عہ - بہ) + جم ۲ بہ مم ½ (عہ - بہ) مم ½ (بہ - جہ)

+ جم ۲ جہ مم ½ (بہ - جہ) مم ½ (جہ - عہ)

= جم ۲ عہ + جم ۲ بہ + جم ۲ جہ + ۲ جم (بہ + جہ) + ۲ جم (جہ + عہ) + ۲ جم (عہ + بہ)

ضابطہ مم ½ ط = (۱ + جم ط) / جب ط کے ذریعہ دائیں جانب کے ہر حاصل التمام کو تبدیل کرو اور پھر پورے جملہ کا مشترک نسب نما جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ) بناؤ تو شمار کنندہ ہو جاتا ہے

Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) {۱ + جم (جہ - عہ)} {۱ + جم (عہ - بہ)}

یا Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) + Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) جم (جہ - عہ) جم (عہ - بہ)

+ Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) {جم (جہ - عہ) + جم (عہ - بہ)}

یا {۱ + Σ جم (بہ - جہ)} Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) - ½ Σ جم ۲ عہ جب ۲ (بہ - جہ)

+ Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) جم (جہ - عہ) جم (عہ - بہ)

اب ۱ + Σ جم (بہ - جہ) = ۴ جم ½ (بہ - جہ) جم ½ (جہ - عہ) جم ½ (عہ - بہ)

بموجب مثال ۴ دفعہ ۷۴؛

اور Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) = Σ جم (بہ + جہ) Σ جب (جہ - بہ)

= ۴ جب ½ (بہ - جہ) جب ½ (جہ - عہ) جب ½ (عہ - بہ) Σ جم (بہ + جہ)

نیز Σ جم ۲ عہ جب ۲ (بہ - جہ) = ۰

اور Σ جم ۲عہ جب (بہ - جہ) جم (جہ - عہ) جم (عہ - بہ) = $\frac{1}{4}$ Σ جم ۲عہ {جب ۲(بہ - جہ) - جب ۲(جہ - عہ) - جب ۲(عہ - بہ)}

= $\frac{1}{2}$ Σ جم ۲عہ جب ۲(بہ - جہ) - $\frac{1}{4}$ Σ جم ۲عہ Σ جب ۲(بہ - جہ)

= جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ) Σ جم ۲عہ

پس مذکورہ بالا اشمار کنندہ

= جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ) {۲ Σ جم (بہ + جہ) + Σ جم ۲عہ}؛

اسلیے یہ جملہ = ۲ Σ جم (بہ + جہ) + Σ جم ۲عہ

(۹) اگر

عہ + بہ + جہ = π، اور مس $\frac{1}{4}$(بہ + جہ - عہ) مس $\frac{1}{4}$(جہ + عہ - بہ) مس $\frac{1}{4}$(عہ + بہ - جہ) = ۱

تو ثابت کرو کہ ۱ + جم عہ + جم بہ + جم جہ = ۰

دی ہوئی مساوات کا مربع لینے سے،

جب^2 ($\frac{1}{4}\pi$ - $\frac{1}{2}$عہ) جب^2 ($\frac{1}{4}\pi$ - $\frac{1}{2}$بہ) جب^2 ($\frac{1}{4}\pi$ - $\frac{1}{2}$جہ)

= جم^2 ($\frac{1}{4}\pi$ - $\frac{1}{2}$عہ) جم^2 ($\frac{1}{4}\pi$ - $\frac{1}{2}$بہ) جم^2 ($\frac{1}{4}\pi$ - $\frac{1}{2}$جہ)

یا (۱ - جب عہ)(۱ - جب بہ)(۱ - جب جہ) = (۱ + جب عہ)(۱ + جب بہ)(۱ + جب جہ)

پس جب عہ + جب بہ + جب جہ + جب عہ جب بہ جب جہ = ۰، (81)

یا ۴ جم $\frac{1}{2}$عہ جم $\frac{1}{2}$بہ جم $\frac{1}{2}$جہ + جب عہ جب بہ جب جہ = ۰؛

اس لیے ۱ + ۲ جب $\frac{1}{2}$عہ جب $\frac{1}{2}$بہ جب $\frac{1}{2}$جہ = ۰،

نیز جم عہ + جم بہ + جم جہ - ۱ = ۴ جب $\frac{1}{2}$عہ جب $\frac{1}{2}$بہ جب $\frac{1}{2}$جہ؛

اس لیے   جم عہ + جم بہ + جم جہ + ۱ = ۰

(۱۰) اگر   مس ½ (بہ + جہ − عہ) مس ½ (جہ + عہ − بہ) مس ½ (عہ + بہ − جہ) = ۱

تو ثابت کرو کہ   جب ۲ عہ + جب ۲ بہ + جب ۲ جہ = ۴ جم عہ جم بہ جم جہ

اب   جب ½ (بہ + جہ − عہ) جب ½ (جہ + عہ − بہ) جب ½ (عہ + بہ − جہ)

= جم ½ (بہ + جہ − عہ) جم ½ (جہ + عہ − بہ) جم ½ (عہ + بہ − جہ)

یا   {جم (بہ − عہ) − جم جہ} جب ½ (عہ + بہ − جہ) = {جم (بہ − عہ) + جم جہ} جم ½ (عہ + بہ − جہ)

یہ مساوات لکھی جا سکتی ہے

جم (بہ − عہ) جم ½ (عہ + بہ − جہ + ½ π) + جم جہ جب ½ (عہ + بہ − جہ + ½ π) = ۰

اور   جب ۲ عہ + جب ۲ بہ + جب ۲ جہ − ۴ جم عہ جم بہ جم جہ

= ۲ جب (عہ + بہ) جم (بہ − عہ) − ۲ جم جہ {جم (بہ − عہ) + جم (عہ + بہ) − جب جہ}

= ۲ جم (بہ − عہ) {جب (عہ + بہ) − جب (½ π − جہ)} − ۲ جم جہ {جم (بہ + عہ) − جم (½ π − جہ)}

= ۲ جب ½ (عہ + بہ + جہ − ½ π) {جم (بہ − عہ) جم ½ (عہ + بہ − جہ + ½ π)

+ جم جہ جب ½ (عہ + بہ − جہ + ½ π)}

اور یہ صفر کے مساوی ہے۔

(۱۱) اگر یہ دیا گیا ہو کہ

۴ جم (ما − ی) جم (ی − لا) جم (لا − ما) = ۱

تو ثابت کرو کہ

۱ + ۱۲ جم ۲ (ما − ی) جم ۲ (ی − لا) جم ۲ (لا − ما)

= ۴ جم ۳ (ما − ی) جم ۳ (ی − لا) جم ۳ (لا − ما)

فرض کرو کہ   عہ = ما − ی، بہ = ی − لا، جہ = لا − ما

تب   عہ + بہ + جہ = ۰،

پس   ۱ − جم^2 عہ − جم^2 بہ − جم^2 جہ + ۲ جم عہ جم بہ جم جہ = ۰،

اس لیے جم² عہ + جم² بہ + جم² جہ = ۳/۴ ؛

اب جم ۳ عہ جم ۳ بہ جم ۳ جہ = جم عہ جم بہ جم جہ (۴ جم² عہ − ۳) (۴ جم² بہ − ۳) (۴ جم² جہ − ۳)

= ۱/۴ (۴ − ۲۷ − ۴۸ Σ جم² بہ جم² جہ + ۳۶ Σ جم² عہ)

= ۱/۴ (۳۱ − ۴۸ Σ جم² بہ جم² جہ)

اور جم ۲ عہ جم ۲ بہ جم ۲ جہ = (۲ جم² عہ − ۱) (۲ جم² بہ − ۱) (۲ جم² جہ − ۱)

= (۱/۴ − ۱ + ۳ − ۴ Σ جم² بہ جم² جہ)

= ۵/۴ − ۴ Σ جم² بہ جم² جہ

پس ۴ جم ۳ عہ جم ۳ بہ جم ۳ جہ − ۱۲ جم ۲ عہ جم ۲ بہ جم ۲ جہ = ۱

(۱۲) اگر

(ما² + ی² − ۲ ما ی جم عہ) / جب² عہ = (ی² + لا² − ۲ ی لا جم بہ) / جب² بہ = (لا² + ما² − ۲ لا ما جم جہ) / جب² جہ

تو ثابت کرو کہ مساواتوں کے حسب ذیل جٹوں میں سے ایک درست ہے، جہاں ۲ س = عہ + بہ + جہ (82)

لا / جم (س − عہ) = ما / جم (س − بہ) = ی / جم (س − جہ)،

لا / جم س = ما / جم (س − جہ) = ی / جم (س − بہ)

لا / جم (س − جہ) = ما / جم س = ی / جم (س − عہ)

لا / جم (س − بہ) = ما / جم (س − عہ) = ی / جم س

فرض کرو کہ مساوی کسروں میں سے ہر کسر ک² سے تعبیر کی گئی ہے، اور

رکھو لا = ک. جم ط، ما = ک. جم فہ، ی = ک. جم پہ، تب

جم² فہ + جم² پہ - ۲ جم فہ. جم پہ. جم عہ = ۱ - جم² عہ،

یا (جم عہ - جم فہ جم پہ)² = جب² فہ جب² پہ

اس لیے جم عہ = جم (فہ ± پہ)؛ اسی طرح ہم بتا سکتے ہیں کہ جم بہ = جم (پہ ± ط)، جم جہ = جم (ط ± فہ)، اس لیے عمومیت کے نقصان کے بغیر ہم رکھ سکتے ہیں عہ = فہ ± پہ، بہ = پہ ± ط، جہ = ط ± فہ - اس غرض سے کہ یہ مساواتیں موافق ہو سکیں ہمیں تمام مبہم علامتوں کو مثبت لینا چاہیے، یا دو کو منفی اور ایک کو مثبت۔ پہلی صورت میں ط = س - عہ، فہ = س - بہ، پہ = س - جہ؛ دوسری صورت میں قیمتوں کے حسب ذیل تین جٹ ملتے ہیں

ط = س ، فہ = س - جہ ، پہ = بہ - س

ط = جہ - س ، فہ = س ، پہ = س - بہ

ط = س - بہ ، فہ = عہ - س ، پہ = س

اس طرح دی ہوئی چار مساواتوں میں سے ایک ہمیشہ پوری ہوتی ہے۔

مساواتوں کا حل

۶۹ — مثالیں

(۱) حل کرو مساوات

جب ۲ ط قط ۴ ط + جم ۲ ط = جم ۶ ط

یہ مساوات لکھی جا سکتی ہے

جب ۲ ط قط ۴ ط + جم ۲ ط - جم ۶ ط = ۰،

یا جب ۲ ط قط ۴ ط + ۲ جب ۴ ط جب ۲ ط = ۰،

پس جب ۲ ط = ۰ یا قط ۴ ط + ۲ جب ۴ ط = ۰

یعنے جب ۸ ط = -۱

اس لیے حل ہیں

ط = ½ م π، ط = ½ {ن π − (−۱)^ن π/۲}

(۲) حل کرو مساوات[1]

جم^۳ عہ قط لا + جب^۳ عہ قم لا = ۱، لا کے لیے

یہ مساوات لکھی جا سکتی ہے

جم^۳ عہ جب لا + جب^۳ عہ جم لا = جب لا جم لا،

یا جب^۳ عہ جم لا − جم عہ جب^۲ عہ جب لا = جب لا (جم لا − جم عہ)، (83)

پس جب^۲ عہ جب (عہ − لا) = جب لا (جم لا − جم عہ)،

اس مساوات کی طرفین جب ½ (عہ − لا) سے تقسیم پذیر ہیں، اس لیے اس جزو ضربی کو نکال دینے سے

۲ جب^۲ عہ جم ½ (عہ − لا) = ۲ جب لا جب ½ (عہ + لا)

= جم ½ (لا − عہ) − جم ½ (۳ لا + عہ)

اس لیے جم ½ (۳ لا + عہ) = جم ½ (لا − عہ) جم ۲ عہ،

یا ۲ جم ½ (۳ لا + عہ) = جم ½ (لا + ۳ عہ) + جم ½ (لا − ۵ عہ)،

جس کو لکھا جا سکتا ہے

جم ½ (۳ لا + عہ) − جم ½ (لا + ۳ عہ) = جم ½ (لا − ۵ عہ) − جم ½ (۳ لا + عہ)،

اس لیے جب ½ (لا − عہ) جب (لا + عہ) = جب (لا − عہ) جب ½ (لا + ۳ عہ)؛

پھر مشترک جزو ضربی جب ½ (لا − عہ) کو خارج کر دینے سے

جب (لا + عہ) = − ۲ جم ½ (لا − عہ) جب ½ (لا + ۳ عہ)

= − {جب (لا + عہ) + جب ۲ عہ}،

---

[1] یہ مثال واسٹن ہوم کے مسئلوں سے لی گئی ہے۔

اس لیے   جب (لا + عہ) = − جب عہ جم عہ

اس لیے حل ہیں

لا = ۲ن π + عہ، اور لا = ن π − عہ + (−۱)^ن جب^−۱ (جب عہ جم عہ)

(۳) حل کرو مساواتیں

ا جب (لا + ما) − ب جب (لا − ما) = ۲م جم لا
ا جب (لا + ما) + ب جب (لا − ما) = ۲ن جم ما

اِن سے حاصل ہوتا ہے

(۱/ن²) {ا جب (لا + ما) + ب جب (لا − ما)}² − (۱/م²) {ا جب (لا + ما) − ب جب (لا − ما)}²
= ۴ (جم² ما − جم² لا) = ۴ جب (لا + ما) جب (لا − ما)

فرض کرو جب (لا + ما) / جب (لا − ما) = ت تو ت حسب ذیل دو درجی مساوات سے ملیگا

ا² ت² (۱/ن² − ۱/م²) + ۲ت {اب (۱/ن² + ۱/م²) − ۲}
+ ب² (۱/ن² − ۱/م²) = ۰

اس مساوات کی دونوں اصلوں کو ت سے تعبیر کرنے سے

ت = جب (لا + ما) / جب (لا − ما) = (مس لا + مس ما) / (مس لا − مس ما)

اس لیے   مس لا / مس ما = (ت + ۱) / (ت − ۱)

نیز دی ہوئی مساواتوں میں سے ایک کو دوسرے سے تقسیم کرنے سے

م جم لا / ن جم ما = (ا ت − ب) / (ا ت + ب)

اور پھر ان دو مساواتوں اور رشتہ $قط^2 ما - مس^2 ما = ۱$ کے ذریعہ ما کو ساقط کرنے سے

$$\frac{ن^2}{م^2}\left(\frac{ات - ب}{ات + ب}\right)^2 قط^2 لا - \left(\frac{ت - ۱}{ت + ۱}\right)^2 مس^2 لا = ۱$$

جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$مس لا = \pm\left\{۱ - \frac{ن^2}{م^2}\left(\frac{ات - ت}{ات + ب}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{ن^2}{م^2}\left(\frac{ات - ب}{ات + ب}\right)^2 - \left(\frac{ت - ۱}{ت + ۱}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

اس سے مس لا کی چار قیمتیں ملتی ہیں، جن میں سے دو، دو اُس دو درجی مساوات کی ہر اصل کے جواب میں ہیں جو ت میں ہے۔ اس طرح لا معلوم ہو چکا اور پھر ما اس مساوات

$$مس ما = \frac{ت - ۱}{ت + ۱} مس لا$$

سے ملجاتا ہے۔

اسقاط (84)

۷۰ ـــ مثالیں۔

(۱) مساواتوں $\frac{جم^3 ط}{جم(عہ - ۳ ط)} = \frac{جب^3 ط}{جب(عہ - ۳ ط)} = م$ سے ط ساقط کرو۔

چونکہ $$م = \frac{جب ط جم^3 ط + جم ط جب^3 ط}{جب(عہ - ۲ ط)} = \frac{جب ط جم ط}{جب(عہ - ۲ ط)}$$

اس لیے $$\frac{۱}{۲م} = جب عہ مم ۲ ط - جم عہ$$

نیز $$م = \frac{جم^4 ط - جب^4 ط}{جم ط جم(عہ - ۳ ط) - جب ط جب(عہ - ۳ ط)} = \frac{جم ۲ ط}{جم(عہ - ۲ ط)}$$

$$= \frac{۱}{جم عہ + جب عہ مس ۲ ط}$$

پس (۱/۲م + جم عہ)(۱/م − جم عہ) = جب² عہ،

یا ۲م² − ۱ = م جم عہ،

اور یہ مطلوبہ حاصل اسقاط ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ مساواتوں

جم ۳(ط − عہ) / جم (ط − بہ) = جم ۳(ط + عہ − جہ) / جم (ط + بہ − جہ) = جم ۳ عہ / جم بہ

سے ط کو ساقط کرنے سے جو نتیجہ حاصل ہوتا ہے وہ بہ سے آزاد ہے۔

مساوات

جم ۳ (لا − عہ) / جم (لا − بہ) = جم ۳ عہ / جم بہ

میں لا کو پورا کرنے والی تین غیر تابع قیمتیں ط، جہ − ط، اور صفر ہیں۔ اسلئے

جم ۳ لا جم ۳ عہ + جب ۳ لا جب ۳ عہ = ک (جم لا جم بہ + جب لا جب بہ)

جہاں ک = جم ۳ عہ \ جم بہ؛ جم ۳ لا، جب ۳ لا کی بجائے ان کی قیمتیں علی الترتیب جم لا، جب لا کی رقوم میں رکھنے اور پھر پوری مساوات کو جم³ لا سے تقسیم کرنے سے مس لا (= ت) میں حسب ذیل کعبی مساوات ملتی ہے

جم ۳ عہ{۴ − ۳ (۱ + ت²)} + جب ۳ عہ{۳ت (۱ + ت²) − ۴ ت³}

= ک (جم بہ + ت جب بہ) (۱ + ت²)

یا ت³(ک جب بہ + جب ۳ عہ) + ت² (ک جم بہ + ۳ جم ۳ عہ) +

ت (ک جب بہ − ۳ جب ۳ عہ) + ک جم بہ − جم ۳ عہ = ۰؛

اِس لیے دو درجی مساوات

$$\text{ت}^2(\text{ک جب بہ} + \text{جب ۳ عہ}) + \text{ت}(\text{ک جم بہ} + \text{۳ جم ۳ عہ}) + \text{ک جب بہ} - \text{۳ جب ۳ عہ} = 0،$$

کی اصلیں مس طہ اور مس (جہ ـ طہ) ہیں؛

$$\text{اِس لیے}\qquad \text{مس طہ} + \text{مس (جہ − طہ)} = \frac{\text{ک جم بہ} + \text{۳ جم ۳ عہ}}{\text{ک جب بہ} + \text{جب ۳ عہ}}$$

$$\text{اور}\qquad \text{مس طہ مس (جہ − طہ)} = \frac{\text{ک جب بہ} - \text{۳ جب ۳ عہ}}{\text{ک جب بہ} + \text{جب ۳ عہ}}$$

$$\text{پس}\qquad \text{مس جہ} = \frac{-(\text{ک جم بہ} + \text{۳ جم ۳ عہ})}{\text{۴ جب ۳ عہ}} = -\text{مم ۳ عہ}،$$

$$\text{یا}\qquad \text{جہ} - \text{۳ عہ} = (\text{۲ ر} + 1)\tfrac{1}{2}\pi$$

(85) جہاں ر کوئی صحیح عدد ہے۔ اس طرح حاصل اسقاط بہ پر منحصر نہیں ہے۔

(۳) مساواتوں

$$\frac{\text{لا جم طہ}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما جب طہ}}{\text{ب}} = 1،\quad \text{لا جب طہ} - \text{ما جم طہ} = (\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,\text{طہ} + \text{ب}^2\,\text{جم}^2\,\text{طہ})^{\frac{1}{2}}$$

سے طہ ساقط کرو۔

ہر مساوات کا مربع لو اور مس طہ = ت رکھو تو مساواتیں ہو جاتی ہیں

$$\text{ت}^2\left(1 - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}\right) - 2\,\text{ت}\,\frac{\text{لا ما}}{\text{ا ب}} + \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}\right) = 0،$$

$$\text{ت}^2(\text{ا}^2 - \text{لا}^2) + 2\,\text{ت لا ما} + (\text{ب}^2 - \text{ما}^2) = 0۔$$

اِن مساواتوں سے ت کو ساقط کرنا ہے۔ ان کو ت^2 اور ت کے لیے حل کرنے سے

$$\frac{\text{ت}^2}{2\,\text{لا ما}\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ب}^2 - \text{ما}^2}{\text{ا ب}}\right)} = \frac{\text{ت}}{\frac{(\text{ب}^2 - \text{ما}^2)^2}{\text{ب}^2} - \frac{(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)^2}{\text{ا}^2}} = \frac{1}{\frac{2\,\text{لا ما}(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)}{\text{ا ب}} - \frac{2\,\text{لا ما}(\text{ب}^2 - \text{ما}^2)}{\text{ب}^2}}$$

پس

$$\left\{\frac{\text{ب}^2-\text{ما}^2}{\text{ب}}+\frac{\text{ا}^2-\text{لا}^2}{\text{ا}}\right\}^2\left[\left\{\frac{\text{ب}^2-\text{ما}^2}{\text{ب}}-\frac{\text{ا}^2-\text{لا}^2}{\text{ا}}\right\}^2\right]=-\frac{4\,\text{لا}^2\text{ما}^2}{\text{ا}^3\text{ب}^3}\left\{\text{ب}(\text{ا}^2-\text{لا}^2)+\text{ا}(\text{ب}^2-\text{ما}^2)\right\}^2$$

یا

$$\left\{\text{ا}+\text{ب}-\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}}-\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}}\right\}\left[\left\{\frac{\text{ب}^2-\text{ما}^2}{\text{ب}}-\frac{\text{ا}^2-\text{لا}^2}{\text{ا}}\right\}^2+\frac{4\,\text{لا}^2\text{ما}^2}{\text{ا}\,\text{ب}}\right]=0$$

اس لیے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}}=\text{ا}+\text{ب}$$

حاصل اِسقاط ہے۔

(۴) مساواتوں

$$\text{لا جب ط}+\text{ما جم ط}=2\,\text{ا جب }2\,\text{ط}،$$

$$\text{لا جم ط}-\text{ما جب ط}=\text{ا جم }2\,\text{ط}$$

سے ط ساقط کرو۔

لا اور ما کے لیے حل کرنے سے

$$\text{لا}=\text{ا جم ط}\,(2-\text{جم }2\,\text{ط})،\quad \text{ما}=\text{ا جب ط}\,(2+\text{جم }2\,\text{ط})$$

یا

$$\text{لا}=\text{ا جم ط}\,(\text{جم}^2\text{ط}+3\,\text{جب}^2\text{ط})،\quad \text{ما}=\text{ا جب ط}\,(3\,\text{جم}^2\text{ط}+\text{جب}^2\text{ط})$$

اسلیے

$$\text{لا}+\text{ما}=\text{ا}(\text{جم ط}+\text{جب ط})^3،\quad \text{لا}-\text{ما}=\text{ا}(\text{جم ط}-\text{جب ط})^3$$

پس

$$(\text{لا}+\text{ما})^{\frac{2}{3}}=\text{ا}^{\frac{2}{3}}(1+\text{جب }2\,\text{ط})،\quad (\text{لا}-\text{ما})^{\frac{2}{3}}=\text{ا}^{\frac{2}{3}}(1-\text{جب }2\,\text{ط})$$

اور حاصل اسقاط ہے

$$(\text{لا}+\text{ما})^{\frac{2}{3}}+(\text{لا}-\text{ما})^{\frac{2}{3}}=2\,\text{ا}^{\frac{2}{3}}$$

مساواتوں کی اصلوں کے درمیان رشتے

۱۷ — مثالیں —

(۱) مساوات $\qquad \text{ا جم ط} + \text{ب جب ط} = \text{ج}$

پر غور کرو۔

فرض کرو کہ ط کی دو الگ الگ قیمتیں عہ، بہ ہیں جو اس مساوات کو پورا کرتی ہیں، تب

$$\text{ا جم عہ} + \text{ب جب عہ} = \text{ج}،$$
$$\text{ا جم بہ} + \text{ب جب بہ} = \text{ج}،$$

اس لیے (86)

$$\frac{\text{ا}}{\text{جب بہ} - \text{جب عہ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جم عہ} - \text{جم بہ}} = \frac{\text{ج}}{\text{جب}\,(\text{بہ} - \text{عہ})}$$

پس $\qquad \text{مس}\,\frac{1}{2}(\text{بہ} + \text{عہ}) = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$

اور نیز $\qquad \frac{1}{\text{ج}}\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{بہ} - \text{عہ}) = \frac{1}{\text{ب}}\,\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{بہ} + \text{عہ}) = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{بہ} + \text{عہ})$

اِن رشتوں کو حسب ذیل طریقہ پر بھی معلوم کیا جا سکتا ہے:- رکھو $\text{مس}\,\frac{1}{2}\text{ط} = \text{ت}$ تو دی ہوئی مساوات لکھی جا سکتی ہے

$$\text{ا}\,(1 - \text{ت}^2) + 2\,\text{ب ت} = \text{ج}\,(1 + \text{ت}^2)$$

یا $\qquad \text{ت}^2(\text{ج} + \text{ا}) - 2\,\text{ب ت} + \text{ج} - \text{ا} = 0$

اس دو درجی کی اصلیں $\text{مس}\,\frac{1}{2}\text{عہ}$، $\text{مس}\,\frac{1}{2}\text{بہ}$ ہیں، اس لیے

$$\text{مس}\,\frac{1}{2}\text{عہ}\;\text{مس}\,\frac{1}{2}\text{بہ} = \frac{\text{ج} - \text{ا}}{\text{ج} + \text{ا}}$$

اِس لیے ربط حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{بہ} - \text{عہ})}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{بہ} + \text{عہ})} = \frac{\text{ج}}{\text{ا}}$$

نیز $\qquad \text{مس}\,\frac{1}{2}\text{عہ} + \text{مس}\,\frac{1}{2}\text{بہ} = \frac{2\,\text{ب}}{\text{ج} + \text{ا}}$

جس سے دوسرا ربط حاصل ہو سکتا ہے۔

(۲) مساوات

$$\text{ا}\,\text{جم}\,۲\text{ط} + \text{ب}\,\text{جب}\,۲\text{ط} + \text{ج}\,\text{جم}\,\text{ط} + \text{د}\,\text{جب}\,\text{ط} + \text{ع} = ۰$$

پر غور کرو۔

فرض کرو $\text{ت} = \text{مس}\,\frac{۱}{۲}\text{ط}$ تو دی ہوئی مساوات کو ت میں چار درجی کے طور پر لکھا جا سکتا ہے چنانچہ

$$\text{ت}^{۴}(\text{ا} - \text{ج} + \text{ع}) + \text{ت}^{۳}(-۴\text{ب} + ۲\text{د}) + \text{ت}^{۲}(-۶\text{ا} + ۲\text{ع}) + \text{ت}(۴\text{ب} + ۲\text{د}) + (\text{ا} + \text{ج} + \text{ع}) = ۰ \text{؛}$$

اگر اس چار درجی کی اصلیں $\text{مس}\,\frac{۱}{۲}\text{ط}_{۱}$، $\text{مس}\,\frac{۱}{۲}\text{ط}_{۲}$، $\text{مس}\,\frac{۱}{۲}\text{ط}_{۳}$، $\text{مس}\,\frac{۱}{۲}\text{ط}_{۴}$ ہوں تو

$$\Sigma\,\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ط}_{۱} = \frac{۴\text{ب} - ۲\text{د}}{\text{ا} - \text{ج} + \text{ع}}\text{،}\quad \Sigma\,\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ط}_{۱}\,\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ط}_{۲} = \frac{۲\text{ع} - ۶\text{ا}}{\text{ا} - \text{ج} + \text{ع}}\text{،}$$

$$\Sigma\,\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ط}_{۱}\,\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ط}_{۲}\,\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ط}_{۳} = -\frac{۴\text{ب} + ۲\text{د}}{\text{ا} - \text{ج} + \text{ع}}\text{،}\quad \text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ط}_{۱}\,\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ط}_{۲}\,\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ط}_{۳}\,\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ط}_{۴} =$$

$\frac{\text{ا} + \text{ج} + \text{ع}}{\text{ا} - \text{ج} + \text{ع}}$؛ اور ان رشتوں سے ان چار مماسوں کے متشاکل تفاعل محسوب کیے جا سکتے ہیں۔

اگر $۲\text{س} = \text{ط}_{۱} + \text{ط}_{۲} + \text{ط}_{۳} + \text{ط}_{۴}$ تو

$$\text{مس}\,\text{س} = \frac{\Sigma\,\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ط}_{۱} - \Sigma\,\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ط}_{۱}\,\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ط}_{۲}\,\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ط}_{۳}}{۱ - \Sigma\,\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ط}_{۱}\,\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ط}_{۲} + \text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ط}_{۱}\,\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ط}_{۲}\,\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ط}_{۳}\,\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ط}_{۴}}$$

$$= \frac{۴\text{ب} - ۲\text{د} + (۴\text{ب} + ۲\text{د})}{\text{ا} - \text{ج} + \text{ع} - (۲\text{ع} - ۶\text{ا}) + \text{ا} + \text{ج} + \text{ع}} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$$

طالب علم حسب ذیل رشتے مشق کے طور پر ثابت کرے۔

$$\frac{\text{ا}}{\text{جم}\,\text{س}} = \frac{\text{ب}}{\text{جب}\,\text{س}} = \frac{-\text{ج}}{\Sigma\,\text{جم}(\text{س} - \text{ط}_{۱})} = \frac{-\text{د}}{\Sigma\,\text{جب}(\text{س} - \text{ط}_{۱})} = \frac{\text{ع}}{\Sigma\,\text{جم}\,\tfrac{۱}{۲}(\text{ط}_{۱} + \text{ط}_{۲} - \text{ط}_{۳} - \text{ط}_{۴})}$$

(۳) اگر

جب عہ جم (عہ + ط) مس ۲ عہ = جب بہ جم (بہ + ط) مس ۲ بہ = جب جہ جم (جہ + ط) مس ۲ جہ
= جب ضہ جم (ضہ + ط) مس ۲ ضہ

اور عہ، بہ، جہ، ضہ میں سے کسی دو زاویوں میں π کے ضِعف کا فرق نہ ہو تو ثابت کرو کہ عہ + بہ + جہ + ضہ + ط، π کا ضِعف ہے۔ (87)

مساوی مقداروں میں سے ہر مقدار کو ک کے مساوی رکھو تو عہ، بہ، جہ، ضہ مساوات

جب لا جم (لا + ط) مس ۲ لا = ک

کی اصلیں ہیں۔ یہ مساوات لکھی جا سکتی ہے

۲ مس² لا (جم ط ـ جب ط مس لا) = ک (۱ ـ مس⁴ لا)،

پس Σ مس عہ = ۲ جب ط / ک ، Σ مس عہ مس بہ = ۲ جم ط / ک ،

Σ مس عہ مس بہ مس جہ = ۰ ، مس عہ مس بہ مس جہ مس ضہ = ـ ۱

اس لیے مس (عہ + بہ + جہ + ضہ) = ۲ جب ط / (ک ـ ۲ جم ط ـ ک) = ـ مس ط

پس عہ + بہ + جہ + ضہ + ط، π کا ضِعف ہے۔

(۴) اگر عہ، بہ، جہ، غیر مساوی زاویے ہوں ہر ایک ۲ π سے کم تو ثابت کرو کہ مساواتیں

جم (عہ + ط) قط ۲ عہ = جم (ط + بہ) قط ۲ بہ = جم (ط + جہ) قط ۲ جہ

ایک ساتھ موجود نہیں ہو سکتیں جب تک کہ

جم (بہ + جہ) + جم (جہ + عہ) + جم (عہ + بہ)

صفر کے مساوی نہ ہو۔

ہر مساوی مقدار کو ک کے مساوی رکھنے سے

جم عہ . جم ط − جب عہ جب ط − ک جم ۲ عہ = ۰ ،

جم بہ . جم ط − جب بہ جب ط − ک جم ۲ بہ = ۰ ،

جم جہ . جم ط − جب جہ جب ط − ک جم ۲ جہ = ۰ ،

پس جم ط اور جب ط کو ساقط کرنے سے

Σ . جم ۲ عہ جب (بہ − جہ) = ۰ ،

یا Σ . جم (بہ + جہ) Σ جب (جہ − بہ) = ۰ ، بموجب مثال (۲) دفعہ ۶۸

پس Σ . جم (بہ + جہ) = ۰ ، سوائے اس صورت میں جبکہ Σ . جم (جہ − بہ) = ۰

یعنی جبکہ جب $\frac{1}{2}$ (بہ − جہ) جب $\frac{1}{2}$ (جہ − عہ) جب $\frac{1}{2}$ (عہ − بہ) = ۰

یہ مثال بھی مثال (۳) کی طرح حل ہو سکتی ہے۔

اعظم اور اقل قیمتیں ــ لاتساویات

۷۲ ــ مثالیں ـ

(۱) ا. جم ط + ب جب ط

کی بڑی سے بڑی قیمت ہے $\sqrt{ا^{2} + ب^{2}}$

رکھو $\frac{ب}{ا}$ = مس عہ، تو ب = $\sqrt{ا^{2} + ب^{2}}$ جب عہ، ا = $\sqrt{ا^{2} + ب^{2}}$ جم عہ،

اس طرح ا. جم ط + ب جب ط = $\sqrt{ا^{2} + ب^{2}}$. جم (ط − عہ)،

اب چونکہ جم (ط − عہ) ہمیشہ ± ۱ کے درمیان واقع ہوتا ہے، اس لیے ا جم ط + ب جب ط
± $\sqrt{ا^{2} + ب^{2}}$ کے درمیان واقع ہوگا۔

(۲) اگر ع = $\sqrt{ا^{2} جم^{2} ط + ب^{2} جب^{2} ط}$ + $\sqrt{ا^{2} جب^{2} ط + ب^{2} جم^{2} ط}$

تو ع، $ا + ب$ اور $\sqrt{۲(ا^2 + ب^2)}$ کے درمیان واقع ہوگا۔

(88) فرض کرو $لا = ا^2 جم^2 ط + ب^2 جب^2 ط = \frac{۱}{۲}(ا^2 + ب^2) + \frac{۱}{۲}(ا^2 - ب^2) جم ۲ط$

تب $ع = \sqrt{لا} + \sqrt{ا^2 + ب^2 - لا}$،

$$ع^2 = ا^2 + ب^2 + ۲\sqrt{\frac{۱}{۴}(ا^2 + ب^2)^2 - \left\{\frac{۱}{۲}(ا^2 + ب^2) - لا\right\}^2}$$

پس ع بڑے سے بڑا ہے جبکہ $لا = \frac{۱}{۲}(ا^2 + ب^2)$، یا ع کی بڑی سے بڑی قیمت $\sqrt{۲(ا^2 + ب^2)}$ ہے؛ نیز ع کم سے کم ہے جبکہ $\frac{۱}{۲}(ا^2 + ب^2) - لا$ بڑے سے بڑا ہو یعنی جبکہ لا کم سے کم ہو اور یہ اس وقت ہوگا جبکہ $جم ۲ط = -۱$، اور اس صورت میں $لا = ب^2$ اور تب $ع = ا + ب$؛ اس لیے یہ ع کی کم سے کم قیمت ہے۔

(۳) اگر ط، صفر اور π کے درمیان واقع ہو تو ثابت کرو کہ

$$مم \frac{۱}{۴} ط - مم ط > ۲$$

چونکہ

$$مم \frac{۱}{۴}ط - مم ط = \frac{جب \frac{۳}{۴}ط}{جب \frac{۱}{۴}ط \, جب ط} = \frac{۳ - ۴ جب^2 \frac{۱}{۴}ط}{جب ط} = \frac{۱ + ۲ جم \frac{۱}{۲}ط}{جب ط}$$

پس $مم \frac{۱}{۴}ط - مم ط = قم ط + قم \frac{۱}{۲}ط$ ؛

اب اگر ط، صفر اور π کے درمیان واقع ہے تو قم ط اور $قم \frac{۱}{۲}ط$ ہر ایک اکائی سے ہرگز کم نہیں ہوسکتا، اس لیے $مم \frac{۱}{۴}ط - مم ط > ۲$،

(۴) اگر ن زاویوں کا جن میں سے ہر ایک مثبت ہے اور $\frac{1}{2}\pi$ سے کم ہے مجموعہ دیا جائے تو بتاؤ کہ اِن زاویوں کی جیوب کا حاصل جمع یا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا جب کہ زاویے سب کے سب مساوی ہوں۔

جیوب التمام کے لیے بھی ایسا ہی ایک مسئلہ درست ہے۔

فرض کرو کہ عہ۱، عہ۲، . . .، عہن زاویے ہیں اور ان کا حاصل جمع ص ہے۔

تب جب عہر + جب عہس = ۲ جب $\frac{1}{2}$ (عہر + عہس) جم $\frac{1}{2}$ (عہر − عہس) اور

چونکہ جم $\frac{1}{2}$ (عہر − عہس) ایک سے کم ہے سوائے اس صورت کہ جبکہ عہر = عہس

اس لیے جب عہر + جب عہس < ۲ جب $\frac{1}{2}$ (عہر + عہس)

اگر عہر ≠ عہس، اس لیے اگر عہ۱، عہ۲، . . . عہن میں سے کوئی دو زاویے غیر مساوی ہوں تو ہم اِن دو زاویوں میں سے ہر ایک کی بجائے ان کے حسابی اوسط کو درج کر کے Σ جب عہ کو بڑھا سکتے ہیں؛ پس Σ جب عہ بڑے سے بڑا ہے جب سب زاویے مساوی ہوں؛

اس لیے Σ جب عہ ≯ ن جب $\frac{ص}{ن}$ ۔

نیز جب عہر جب عہس = $\frac{1}{2}$ {جم (عہر − عہس) − جم (عہر + عہس)}

اور یہ $\frac{1}{2}$ {جم (عہر − عہس) − جم (عہر + عہس)} < $\frac{1}{2}$ {۱ − جم (عہر + عہس)}

یا < جب² $\frac{1}{2}$ (عہر + عہس)

اگر عہر ≠ عہس۔ پس حسب سابق اگر حاصل ضرب جب عہ۱ جب عہ۲ × . . جب عہن میں کوئی دو زاویے غیر مساوی ہوں تو ہم اِن زاویوں میں سے ہر ایک کی بجائے ان کے اوسط حسابی کو درج کر کے حاصل ضرب کو بڑھا سکتے ہیں؛ اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب عہ۱ . . . . . جب عہن بڑے سے بڑا ہے جبکہ عہ۱ = عہ۲ = . . . = عہن، اور اس حاصل ضرب کی بڑی سے بڑی قیمت (جب $\frac{ص}{ن}$)ن ہے۔

(۵) پچھلی مثال کی شرطوں کے تحت ثابت کرو کہ زاویوں کے قاطع التماموں کا حاصل جمع کم سے کم ہے جب سب زاویے مساوی ہوں۔

چونکہ

قم عر + قم عس

= جب ½ (عر + عس) { ۱ / (جم ½ (عر − عس) − جم ½ (عر + عس))

+ ۱ / (جم ½ (عر − عس) + جم ½ (عر + عس)) }

پس عر + عس کی دی ہوئی قیمت کے لیے قم عر + قم عس کی کم سے کم قیمت ہے جبکہ جم ½ (عر − عس) = ۱، یا جبکہ عر = عس ۔ اِس کے بعد استدلال کی صورت وہی ہوگی جو پچھلی مثال کی ہے۔ (89)

(۶) پچھلی دو مثالوں کی شرطوں کے تحت ثابت کرو کہ زاویوں کے مماسوں یا مماس التماموں کا حاصل جمع کم سے کم ہے جبکہ سب زاویے مساوی ہوں۔

(۷) اگر عہ + بہ + جہ = π تو ثابت کرو کہ

جم عہ . جم بہ . جم جہ ≯ ⅛

مساواتوں کے استنباطی نظام

۷۳ — مساواتوں کے نظام کو استنباطی[۱] کہا جائیگا جب کہ مساواتیں باہم موافق نہ ہوں اِلّا آنکہ سر ایک خاص رشتہ کو پورا کریں۔ جب یہ رشتہ پورا ہو تو مساواتوں کے حل تعداد میں لامتناہی ہونگے۔

[۱] دیکھو ”استنباطی مساواتوں کے نظامات پر“ اوسٹن ہوم کا مضمون Proc. London Math. Soc. جلد چہارم میں۔

نظام

ا جم ہ جم جہ + ب جب ہ جب جہ + ج + اَ (جب ہ + جب جہ) + بَ (جم ہ + جم جہ)
+ جَ جب (ہ + جہ) = ۰ ،

ا جم جہ جم عہ + ب جب جہ جب عہ + ج + اَ (جب جہ + جب عہ) + بَ (جم جہ + جم عہ)
+ جَ جب (جہ + عہ) = ۰ ،

ا جم عہ جم ہ + ب جب عہ جب ہ + ج + اَ (جب عہ + جب ہ) + بَ (جم عہ + جم ہ)
+ جَ جب (عہ + ہ) = ۰ ،

تین استنباطی مساواتوں کا ایک نظام ہے -

مساوات

ا جم عہ جم ط + ب جب عہ جب ط + ج + اَ (جب عہ + جب ط) + بَ (جم عہ + جم ط)
+ جَ جب (عہ + ط) = ۰ ،

پر غور کرو - یہ مساوات پوری ہوتی ہے ط = ہ اور ط = جہ سے - اس کو مس $\frac{1}{2}$ ط = م

کی مساوات کے طور پر لکھو، اس طرح :

م^2 (- ا جم عہ + ج - اَ جب عہ + بَ جم عہ - بَ - جَ جب عہ)
+ ۲ م (ب جب عہ + اَ + جَ جم عہ) + (ا جم عہ + ج + اَ جب عہ + بَ + بَ جم عہ
+ جَ جب عہ) = ۰ ،

اس مساوات سے ہم معلوم کرتے ہیں

مس $\frac{1}{2}$ ہ + مس $\frac{1}{2}$ جہ، اور مس $\frac{1}{2}$ ہ مس $\frac{1}{2}$ جہ

پس مس $\frac{1}{2}$ (ہ + جہ) = $\frac{۲ \text{ (ب جب عہ + اَ + جَ جم عہ)}}{۲ \text{ (ا جم عہ + بَ + جَ جب عہ)}}$

اسی طرح ہمیں حاصل ہونا چاہیے

مس $\frac{1}{2}$ (عہ + جہ) = $\frac{\text{ب جب ہ + اَ + جَ جم ہ}}{\text{ا جم ہ + بَ + جَ جب ہ}}$ ،

اب ہم مس ½ (عہ - بہ) کی قیمت اخذ کر سکتے ہیں؛ یہ قیمت ایک کسر ہو گی جس کا شمار کنندہ ہے

(ب جب بہ + اَ + جَ جم بہ) (ا جم عہ + بَ + جَ جب عہ) - (ب جب عہ + اَ + جَ جم عہ)

× (ا جم بہ + بَ + جَ جب بہ)

یا

۲ جب ½ (عہ - بہ) {(جَ^۲ - ا ب) جم ½ (عہ - بہ) + (اَ جَ - ب بَ) جم ½ (عہ + بہ)

- (ا اَ - بَ جَ) جب ½ (عہ + بہ)}

اور نسب نما ہے (۹۵)

(ب جب عہ + اَ + جَ جم عہ) (ب جب بہ + اَ + جَ جم بہ) + (ا جم عہ + بَ + ج جب عہ)

(ا جم بہ + بَ + جَ جب بہ)

یا

(اَ^۲ + جَ^۲) جم عہ جم بہ + (بَ^۲ + جَ^۲) جب عہ جب بہ + (اَ^۲ + بَ^۲)

+ (اَ ب + بَ جَ) (جب عہ + جب بہ) + (اَ جَ + ا بَ) (جم عہ + جم بہ)

+ (ا + ب) جَ جب (عہ + بہ)؛

اس کسر کو جب ½ (عہ - بہ) سے تقسیم کرو تو یہ نسب نما

= (جَ^۲ - ا ب) {ا + جم (عہ - بہ)} + (اَ جَ - ب بَ) (جم عہ + جم بہ) - (ا اَ - بَ جَ) (جب عہ + جب بہ)

پس

(ا + ب) {اَ جم عہ جم بہ + ب جب عہ جب بہ + ج + اَ (جب عہ + جب بہ)

+ بَ (جم عہ + جم بہ) + جَ جب (عہ + بہ)}

= جَ^۲ - اَ^۲ - بَ^۲ + ج ا + ج ب - ا ب

اس لیے جب تک کہ شرط

$$\text{ج}^{2} - \text{ا}^{2} - \text{ب}^{2} + \text{ج ا} + \text{ج ب} - \text{ا ب} = 0$$

پوری نہ ہو مساواتوں کا دیا ہوا نظام پورا نہیں ہو سکتا سوائے عہ، بہ، جہ کی مساوی قیمتوں کے۔ جب یہ شرط پوری ہو تو کوئی ایک مساوات باقی دو مساواتوں سے اخذ کی جا سکتی ہے۔

سلسلوں کو جمع کرنا

۴۷ —— بہت سے سلسلے جن میں دائری تفاعل شامل ہوتے ہیں فرقوں کے طریقہ سے جمع کیے جا سکتے ہیں۔ اس طریقہ کے استعمال کی سب سے اہم مثال وہ سلسلہ ہے جو اُن مقداروں کی جیوب یا جیوب التمام کا ہوتا ہے جو سلسلہ حسابیہ میں ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ سلسلہ ہے

$$\text{س} = \text{جم عہ} + \text{جم}(\text{عہ} + \text{بہ}) + \text{جم}(\text{عہ} + 2\,\text{بہ}) + \cdots + \text{جم}\left[\text{عہ} + (\text{ن} - 1)\,\text{بہ}\right]$$

اب چونکہ

$$\text{جم عہ} = \frac{1}{2\,\text{جب}\,\frac{1}{2}\,\text{بہ}}\left[\text{جب}\left(\text{عہ} + \frac{1}{2}\,\text{بہ}\right) - \text{جب}\left(\text{عہ} - \frac{1}{2}\,\text{بہ}\right)\right],$$

$$\text{جم}(\text{عہ} + \text{بہ}) = \frac{1}{2\,\text{جب}\,\frac{1}{2}\,\text{بہ}}\left[\text{جب}\left(\text{عہ} + \frac{3}{2}\,\text{بہ}\right) - \text{جب}\left(\text{عہ} + \frac{1}{2}\,\text{بہ}\right)\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{جم}\{\text{عہ} + (\text{ن} - 1)\,\text{بہ}\} = \frac{1}{2\,\text{جب}\,\frac{1}{2}\,\text{بہ}}\left[\text{جب}\left(\text{عہ} + \frac{2\text{ن} - 1}{2}\,\text{بہ}\right) - \text{جب}\left(\text{عہ} + \frac{2\text{ن} - 3}{2}\,\text{بہ}\right)\right]$$

اس لیے

$$\text{س} = \frac{1}{2}\,\text{قم}\,\frac{1}{2}\,\text{بہ}\left\{\text{جب}\left(\text{عہ} + \frac{2\text{ن} - 1}{2}\,\text{بہ}\right) - \text{جب}\left(\text{عہ} - \frac{1}{2}\,\text{بہ}\right)\right\}$$

$$= \text{جم}\left(\text{عہ} + \frac{\text{ن} - 1}{2}\,\text{بہ}\right)\text{جب}\,\frac{\text{ن بہ}}{2}\,\text{قم}\,\frac{\text{بہ}}{2}, \quad \cdots (1)$$

(۹۶) اسی طرح ہمیں حاصل ہوگا

جب عہ + جب (عہ + بہ) + جب (عہ + ۲ بہ) + ۰۰۰ + جب {عہ + (ن - ۱) بہ}

= جب (عہ + $\frac{ن-۱}{۲}$ بہ) جب $\frac{ن بہ}{۲}$ قم $\frac{بہ}{۲}$، . . . . (۲)

اِس حاصل جمع کو (۱) میں عہ کی بجائے عہ + $\frac{۱}{۲}$ π درج کرکے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

(۱) میں بہ کی بجائے بہ + π رکھو تو سلسلہ

جم عہ - جم (عہ + بہ) + جم (عہ + ۲ بہ) - ۰۰۰ + $(-۱)^{ن-۱}$ جم {عہ + (ن - ۱) بہ}

کا حاصل جمع ہوگا

جم (عہ + $\frac{ن-۱}{۲}$ بہ) جم $\frac{ن بہ}{۲}$ قط $\frac{بہ}{۲}$، یا جب (عہ + $\frac{ن-۱}{۲}$ بہ) جب $\frac{ن بہ}{۲}$ قط $\frac{بہ}{۲}$

بموجب اس کے کہ ن طاق ہو یا جفت۔

سلسلہ

جب عہ - جب (عہ + بہ) + جب (عہ + ۲ بہ) . . .

کا حاصل جمع، (۲) سے اسی طرح معلوم کیا جاسکتا ہے۔

امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ

$\frac{\text{جب ن عہ}}{\text{جب عہ}}$ = ۲ {جم (ن - ۱) عہ + جم (ن - ۳) عہ + جم (ن - ۵) عہ + ...}

نیز جم ن عہ \ جم عہ کے لیے اسی طرح کا جملہ معلوم کرو۔

(۲) جمع کرو سلسلہ

$جم^۲$ عہ + $جم^۲$ (عہ + بہ) + ۰۰۰ + $جم^۲$ [عہ + (ن - ۱) بہ]

چونکہ $\text{جم}^2\,\text{عہ} = \frac{1}{2}(1+\text{جم}\,2\,\text{عہ})،\ \text{جم}^2(\text{عہ}+\text{بہ}) = \frac{1}{2}\{1+\text{جم}\,2(\text{عہ}+\text{بہ})\}، \ldots$

اس لیے مطلوبہ حاصل جمع ہے

$$\frac{1}{2}\text{ن} + \frac{1}{2}\,\text{جم}\{2\,\text{عہ} + (\text{ن}-1)\,\text{بہ}\}\ \text{جب ن بہ قم بہ}$$

اسی طرح سلسلوں (۱) اور (۲) کی رقموں کی کسی ثبت صحیح عددی قوتوں کا مجموعہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

(۳) جمع کرو سلسلہ $\text{قم}\,2\,\text{عہ} + \text{قم}\,2^2\,\text{عہ} + \cdots + \text{قم}\,2^{\text{ن}}\,\text{عہ}$

چونکہ $\text{قم}\,2\,\text{عہ} = \text{حم}\,\text{عہ} - \text{حم}\,2\,\text{عہ}،\ \text{قم}\,2^2\,\text{عہ} = \text{حم}\,2\,\text{عہ} - \text{حم}\,2^2\,\text{عہ}، \ldots$

$$\text{قم}\,2^{\text{ن}}\,\text{عہ} = \text{حم}\,2^{\text{ن}-1}\,\text{عہ} - \text{حم}\,2^{\text{ن}}\,\text{عہ}$$

اس لیے مطلوبہ حاصل جمع ہے $\text{حم}\,\text{عہ} - \text{حم}\,2^{\text{ن}}\,\text{عہ}$

(۴) جمع کرو سلسلہ

$$\frac{3\,\text{جب لا} - \text{جب}\,3\,\text{لا}}{\text{جم}\,3\,\text{لا}} + \frac{3\,\text{جب}\,3\,\text{لا} - \text{جب}\,3^2\,\text{لا}}{3\,.\,\text{جم}\,3^2\,\text{لا}} + \cdots + \frac{3\,\text{جب}\,3^{\text{ن}-1}\,\text{لا} - \text{جب}\,3^{\text{ن}}\,\text{لا}}{3^{\text{ن}-1}\,.\,\text{جم}\,3^{\text{ن}}\,\text{لا}}$$

چونکہ $\text{مس}\,3^{\text{ن}-1}\,\text{لا} - \frac{1}{3}\,\text{مس}\,3^{\text{ن}}\,\text{لا}$

$$= \frac{3\,\text{جب}\,3^{\text{ن}-1}\,\text{لا}\,.\,\text{جم}\,3^{\text{ن}}\,\text{لا} - \text{جم}\,3^{\text{ن}-1}\,\text{لا}\,\text{جب}\,3^{\text{ن}}\,\text{لا}}{3\,.\,\text{جم}\,3^{\text{ن}-1}\,\text{لا}\,.\,\text{جم}\,3^{\text{ن}}\,\text{لا}}$$

(92) $$= \frac{2\,\text{جب}\,3^{\text{ن}-1}\,\text{لا}\,.\,\text{جم}\,3^{\text{ن}}\,\text{لا} - \text{جب}\,2\times 3^{\text{ن}-1}\,\text{لا}}{3\,\text{جم}\,3^{\text{ن}-1}\,\text{لا}\,.\,\text{جم}\,3^{\text{ن}}\,\text{لا}} = \frac{2\,\text{جب}\,3^{\text{ن}-1}\,\text{لا}\,(\text{جم}\,3^{\text{ن}}\,\text{لا} - \text{جم}\,3^{\text{ن}-1}\,\text{لا})}{3\,\text{جم}\,3^{\text{ن}-1}\,\text{لا}\,\text{جم}\,3^{\text{ن}}\,\text{لا}}$$

$$= \frac{-8\,\text{جب}^3\,3^{\text{ن}-1}\,\text{لا}\,.\,\text{جم}\,3^{\text{ن}-1}\,\text{لا}}{3\,\text{جم}\,3^{\text{ن}-1}\,\text{لا}\,\text{جم}\,3^{\text{ن}}\,\text{لا}} = -2\,\frac{3\,\text{جب}\,3^{\text{ن}-1}\,\text{لا} - \text{جب}\,3^{\text{ن}}\,\text{لا}}{3\,.\,\text{جم}\,3^{\text{ن}}\,\text{لا}}$$

اس لیے $\frac{\text{۳ جب لا - جب ۳ لا}}{\text{جم ۳ لا}} = \frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۳}\text{ مس ۳ لا - مس لا}\right)$ ،

اس لیے $\frac{\text{۳ جب ۳ لا - جب } ۳^{۲} \text{ لا}}{۳ \cdot \text{جم } ۳^{۲} \text{ لا}} = \frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۳^{۲}}\text{ مس } ۳^{۲} \text{ لا} - \frac{۱}{۳}\text{ مس ۳ لا}\right)$ ،

$\frac{\text{۳ جب } ۳^{ن-۱} \text{ لا - جب } ۳^{ن} \text{ لا}}{۳^{ن-۱} \cdot \text{جم } ۳^{ن} \text{ لا}} = \frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۳^{ن}}\text{ مس } ۳^{ن} \text{ لا} - \frac{۱}{۳^{ن-۱}}\text{ مس } ۳^{ن-۱} \text{ لا}\right)$ ؛

اس لیے مطلوبہ حاصل جمع ہے

$$\frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۳^{ن}}\text{ مس } ۳^{ن} \text{ لا - مس لا}\right)$$

۷۵ ـــ تسکلوں

ع$_1$ جم عہ + ع$_2$ جم (عہ + بہ) + ع$_3$ جم (عہ + ۲ بہ) + ... + ع$_ن$ جم {عہ + (ن - ۱) بہ} ،

ع$_1$ جب عہ + ع$_2$ جب (عہ + بہ) + ع$_3$ جب (عہ + ۲ بہ) + ... + ع$_ن$ جب {عہ + (ن - ۱) بہ}

میں سے کسی شکل کے سلسلہ کا حاصل جمع معلوم کیا جا سکتا ہے اگر ع$_ر$ ، ر کا ایک منطق صحیح تفاعل ہو جس کا درجہ کوئی مثبت صحیح عدد س ہو۔

فرض کرو کہ س = ع$_1$ جم عہ + ع$_2$ جم (عہ + بہ) + ع$_3$ جم (عہ + ۲ بہ) + ... + ع$_ن$ جم {عہ + (ن - ۱) بہ}

تب

۲ جم بہ × س = ع$_1$ {جم (عہ - بہ) + جم (عہ + بہ)} + ع$_2$ {جم عہ + جم (عہ + ۲ بہ)}

+ ... + ع$_ر$ {جم (عہ + ر-۲ بہ) + جم (عہ + ر بہ)}

+ ... + ع$_ن$ {جم (عہ + ن-۲ بہ) + جم (عہ + ن بہ)}

اس لیے

$$۲(۱-\text{جم بہ})\,\text{س} = (۲ع_۱ - ع_۲)\,\text{جم عہ} + (۲ع_۲ - ع_۱ - ع_۳)\,\text{جم}(\text{عہ} + \text{بہ}) + \cdots$$

$$+ (۲ع_\text{ر} - ع_{\text{ر}-۱} - ع_{\text{ر}+۱})\,\text{جم}(\text{عہ} + \overline{\text{ر}-۱}\ \text{بہ}) + \cdots$$

$$+ (۲ع_{\text{ن}-۱} - ع_{\text{ن}-۲} - ع_\text{ن})\,\text{جم}(\text{عہ} + \overline{\text{ن}-۲}\ \text{بہ})$$

$$+ (۲ع_\text{ن} - ع_{\text{ن}-۱})\,\text{جم}(\text{عہ} + \overline{\text{ن}-۱}\ \text{بہ}) - ع_۱\,\text{جم}(\text{عہ} - \text{بہ}) - ع_\text{ن}\,\text{جم}(\text{عہ} + \text{ن بہ})$$

اب جملہ $۲ع_\text{ر} - ع_{\text{ر}-۱} - ع_{\text{ر}+۱}$ ایک منطق صحیح تفاعل ہے ر کا اور اس کا درجہ س - ۱ ہے، اس لیے پہلی رقم اور آخری تین رقموں کو چھوڑنے سے ہمیں ایک ہی قسم کا ایک سلسلہ ملتا ہے لیکن جس کے سر دیے ہوئے سلسلہ کے سروں سے نچلے درجہ کے ہیں۔ ہم پھر اس کو ۱ - جم بہ سے ضرب دیتے ہیں، اور اس طرح کا عمل س مرتبہ دہراتے ہیں؛ تب سلسلہ شکل (۱) میں تحویل ہو جائیگا۔

(93)

امثلہ

(۱) جمع کرو سلسلہ

$$\text{جم عہ} + ۲\,\text{جم}(\text{عہ} + \text{بہ}) + ۳\,\text{جم}(\text{عہ} + ۲\text{بہ}) + \cdots + \text{ن}\,\text{جم}\{\text{عہ} + (\text{ن}-۱)\text{بہ}\}$$

اس صورت میں $۲ع_\text{ر} - ع_{\text{ر}-۱} - ع_{\text{ر}+۱} = ۰$، $۲ع_۱ - ع_۲ = ۰$، اس لیے

$$۲(۱-\text{جم بہ})\,\text{س} = (\text{ن}+۱)\,\text{جم}\{\text{عہ} + (\text{ن}-۱)\text{بہ}\} - \text{جم}(\text{عہ} - \text{بہ}) - \text{ن}\,\text{جم}(\text{عہ} + \text{ن بہ})،$$

یا
$$\text{س} = \frac{\frac{۱}{۲}(\text{ن}+۱)\,\text{جم}\{\text{عہ} + (\text{ن}-۱)\text{بہ}\}}{۱-\text{جم بہ}} - \frac{\frac{۱}{۲}\,\text{جم}(\text{عہ} - \text{بہ})}{۱-\text{جم بہ}} - \frac{\frac{۱}{۲}\,\text{ن}\,\text{جم}(\text{عہ} + \text{ن بہ})}{۱-\text{جم بہ}}$$

(۲) جمع کرو سلسلہ

جم عہ + ۲^{۲} جم (عہ + بہ) + ۳^{۲} جم (عہ + ۲ بہ) + ... + ن^{۲} جم {عہ + (ن - ۱) بہ}

یہ سلسلہ پچھلی مثال کے سلسلہ میں تحویل ہو جائیگا اگر اس کو ۲ (۱ - جم بہ) سے ضرب دیا جائے۔

۷۶ — سلسلے

جم عہ + لا جم (عہ + بہ) + لا^{۲} جم (عہ + ۲ بہ) + ... + لا$^{ن-۱}$ جم [عہ + (ن - ۱) بہ]،

جب عہ + لا جب (عہ + بہ) + لا^{۲} جب (عہ + ۲ بہ) + ... + لا$^{ن-۱}$ جب [عہ + (ن - ۱) بہ]،

متوالی سلسلے ہیں جن کے ربط کا پیمانہ (scale of retation) ۱ - ۲ لا جم بہ + لا^{۲} ہے کیونکہ

جم (عہ + ر بہ) + جم (عہ + $\overline{ر - ۲}$ بہ) = ۲ جم بہ جم (عہ + $\overline{ر - ۱}$ بہ)،

اور جب (عہ + ر بہ) + جب (عہ + $\overline{ر - ۲}$ بہ) = ۲ جم بہ جب (عہ + $\overline{ر - ۱}$ بہ)

اس لیے ان کو متوالی سلسلوں کے جمع کرنے کے معمولی قاعدہ سے جمع کیا جاسکتا ہے۔ اگر س سے پہلے سلسلہ کا حاصل جمع تعبیر ہو تو

س (۱ - ۲ لا جم بہ + لا^{۲})

= جم عہ - لا جم (عہ - بہ) - لا^{ن} جم (عہ + ن بہ) + لا$^{ن+۱}$ جم {عہ + (ن - ۱) بہ}

اگر لا < ۱ تو ن کو لا انتہا بڑا کرنے سے لامتناہی سلسلہ

جم عہ + لا جم (عہ + بہ) + لا^{۲} جم (عہ + ۲ بہ) + ...

کے حاصل جمع کی انتہائی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے

$$\frac{\text{جم عہ - لا جم (عہ - بہ)}}{\text{۱ - ۲ لا جم بہ + لا}^{۲}}$$

رکھو عہ = ۰ تو

$$\frac{\text{۱ - لا جم بہ}}{\text{۱ - ۲ لا جم بہ + لا}^2} = \text{۱ + لا جم بہ + لا}^2\text{ جم ۲ بہ + }\ldots\ldots\ \infty\text{ تک}$$

اس لیے نیز

$$\frac{\text{۱ - لا}^2}{\text{۱ - ۲ لا جم بہ + لا}^2} = \text{۱ + ۲ لا جم بہ + ۲ لا}^2\text{ جم ۲ بہ + }\ldots\ \infty\text{ تک، }\ldots\text{(۳)}$$

۷۷ ـــ بعض صورتوں میں سلسلہ کا مجموعہ ایک شکل کے ذریعہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ ہم تمثیلاً دفعہ ۷۴ کے سلسلوں (۱) اور (۲) کو لینگے۔

(94) فرض کروکہ و $ا$، $ا ا_1$، $ا_1 ا_2$، $ا_2 ا_3$، ....، $ا_{ن-1} ا_ن$ ایک دائرے کے مساوی وتر ہیں، اور فرض کروکہ و $ا$ ممدودہ اور $ا ا_1$ کے درمیان زاویہ بہ ہے جہاں و دائرہ کا مرکز ہے، خط مستقیم و لا کھینچو ایسا کہ ا و لا = عہ، تب و $ا$، $ا ا_1$، ...، $ا_{ن-1} ا_ن$ کے میلان و لا کے ساتھ علی الترتیب یہ ہیں

عہ، عہ + بہ، عہ + ۲ بہ، ...، عہ + (ن - ۱) بہ

اور و $ا_ن$ کا میلان عہ + $\frac{1}{2}$ (ن - ۱) بہ ہے؛ نیز اگر دائرہ کا قطر ق ہو تو

و $ا$ = ق جب $\frac{1}{2}$ بہ، و $ا_ن$ = ق جب $\frac{1}{2}$ ن بہ

اب و لا پر و $ا$، $ا ا_1$، ...، $ا_{ن-1} ا_ن$ کے ظِلّوں کا مجموعہ ہے

و $ا$ جم (عہ) + $ا ا_1$ جم (عہ + بہ) + ... + $ا_{ن-1} ا_ن$ جم {عہ + (ن - ۱) بہ}،

یا ق جب $\frac{1}{2}$ بہ [جم عہ + جم (عہ + بہ) + ... + جم {عہ + (ن - ۱) بہ}]

اور یہ مجموعہ، و $ا_ن$ کے ظِل کے مساوی ہونا چاہیے۔ جو یہ ہے

و $ا_ن$ جم {عہ + $\frac{1}{2}$ (ن - ۱) بہ}

یا ق̄ جب ½ ن بہ جم { عہ + ½ (ن - ۱) بہ }

اس لیے

جم عہ + جم (عہ + بہ) + ... + جم { عہ + (ن - ۱) بہ }

= جم { عہ + ½ (ن - ۱) بہ } جب ½ ن بہ قم̄ ½ بہ

اگر ہم ڈلا کے عمود دار خط مستقیم پر ظل لیں تو جیوب کے سلسلہ کا حاصل جمع ملیگا۔

امثلہ

(۱) ایک دائرہ کا قطر د ا ہے، اس کے محیط پر د، ف، ق، ... نقطے ہیں ایسے کہ زاویوں ف ا د، ق ا ف، ر ا ق، ... میں سے ہر ایک عہ ہے؛ ا ف، ا ق، ا ر، ... د پر کے مماس سے ف، ق، ر پر ملتے ہیں۔ اس شکل کے ذریعہ سلسلہ

قط م عہ قط (م + ۱) عہ + قط (م + ۱) عہ قط (م + ۲) عہ + ... ن رقموں تک

کا مجموعہ معلوم کرو۔

(۲) ہندسی طور پر ثابت کرو کہ اگر عہ، بہ، جہ، ... کہ زاویوں کی کوئی تعداد ہو تو

قط عہ قط (عہ + بہ) جب بہ + قط (عہ + بہ) قط (عہ + بہ + جہ) جب جہ

+ قط (عہ + بہ + جہ) قط (عہ + بہ + جہ + ضہ) جب ضہ + ...

= قط عہ قط (عہ + بہ + جہ + ... + کہ) جب (بہ + جہ + ... + کہ)

چھٹے باب پر مثالیں

(۱) مساواتوں جم³ ط + ا جم ط = ب، جب³ ط + ا جب ط = ج

سے ط ساقط کرو۔

(۲) مساواتوں (ا + ب) مس (ط - فہ) = (ا - ب) مس (ط + فہ)،

ا.جم ۲ فہ + ب.جم ۲ ط = ج

سے ط ساقط کرو۔

(95) (۳) ثابت کرو کہ

(اجب فہ + ب جم فہ) (اجب پہ + ب.جم پہ) جب (فہ - پہ)

+ (اجب پہ + ب.جم پہ) (اجب ط + ب جم ط) جب (پہ - ط)

+ (اجب ط + ب.جم ط) (اجب فہ + ب جم فہ) جب (ط - فہ)

+ (ا^{2} + ب^{2}) جب (فہ - پہ) جب (پہ - ط) جب (ط - فہ) = ۰؛

اور اس مساوات کی ہندسی طور پر توضیح کرو۔

(۴) مساوات جم^{2} ط - جم^{2} عہ = ۲.جم^{3} ط (جم ط - جم عہ) - ۲ جب^{3} ط (جب ط - جب عہ)

کو سادہ ترین شکل میں تحویل کرو اور اس کو حل کرو۔

(۵) ثابت کرو کہ تین حادہ زاویوں ا، ب، ج کا مجموعہ ۹۰° سے کم ہے جبکہ یہ زاویے رشتہ جم^{2} ا + جم^{2} ب + جم^{2} ج = ۱ کو پورا کرتے ہوں۔

(۶) اگر ا + ب + ج = ۹۰° تو ثابت کرو کہ مس^{2} ا + مس^{2} ب + مس^{2} ج کی کم سے کم قیمت ایک ہے۔

(۷) مساواتوں

جب ط + جب فہ + جب عہ = جم ط + جم فہ + جم عہ }
ط + فہ = ۲عہ

سے ط اور فہ معلوم کرو۔

(۸) اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

۸ جب $\frac{1}{2}$ا جب $\frac{1}{2}$ب جب $\frac{1}{2}$ج ≯ ۱

(۹) اگر

$$\frac{\text{لا جب ط + ا جب ف + ی جب پ}}{\text{لا جم ط + ا جم ف + ی جم پ}} = \frac{\text{۴ جب ط جب ف جب پ + جب(ط + ف + پ)}}{\text{۴ جم ط جم ف جم پ − جم(ط + ف + پ)}}$$

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا جب }\tfrac{1}{2}\text{(ف + پ − ط) + ا جب }\tfrac{1}{2}\text{(پ + ط − ف) + ی جب }\tfrac{1}{2}\text{(ط + ف − پ)}}{\text{لا جم }\tfrac{1}{2}\text{(ف + پ − ط) + ا جم }\tfrac{1}{2}\text{(پ + ط − ف) + ی جم }\tfrac{1}{2}\text{(ط + ف − پ)}}$$

$$= \frac{\text{۴ جب }\tfrac{1}{2}\text{(ف + پ − ط) جب }\tfrac{1}{2}\text{(پ + ط − ف) جب }\tfrac{1}{2}\text{(ط + ف − پ) + جب }\tfrac{1}{2}\text{(ط + ف + پ)}}{\text{۴ جم }\tfrac{1}{2}\text{(ف + پ − ط) جم }\tfrac{1}{2}\text{(پ + ط − ف) جم }\tfrac{1}{2}\text{(ط + ف − پ) − جم }\tfrac{1}{2}\text{(ط + ف + پ)}}$$

(۱۰) ثابت کرو کہ

$$\frac{\Sigma\ \text{جب ۳ عہ جب(بہ − جہ)}}{\Sigma\ \text{جب ۲ (جہ − بہ)}} = \text{جب(عہ + بہ + جہ)}$$

اور عام صورت میں جبکہ ن کوئی طاق عدد ہو

$$\frac{\Sigma\ \text{جب ن عہ جب (بہ − جہ)}}{\Sigma\ \text{جب ۲ (جہ − بہ)}} = \Sigma \left\{\text{جب (ف عہ + ق بہ + ر جہ)}\right\}$$

جہاں ف، ق، ر کوئی طاق اعداد ہیں جن کا مجموعہ ن ہے۔

(۱۱) اگر

$$\text{ا}^2\text{ . جم عہ . جم بہ + ا (جب عہ + جب بہ) + ۱ = ۰،}$$

$$\text{ا}^2\text{ . جم عہ . جم جہ + ا (جب عہ + جب جہ) + ۱ = ۰،}$$

تو ثابت کرو کہ

$$\text{ا}^2\text{ . جم بہ . جم جہ + ا (جب بہ + جب جہ) + ۱ = ۰،}$$

جہاں بہ، جہ کم ہیں π سے۔

(۱۲) اگر ط کی دو قیمتیں ط۱، ط۲ ہوں جو مساوات

۱ + (جم ط جم فہ)/(جم² عہ) + (جب ط جب فہ)/(جب² عہ) = ۰

کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ اس مساوات میں اگر ط، فہ کی بجائے ط۱ اور ط۲ درج کیے جائیں تو وہ مساوات کو پورا کرینگے۔

(96)

(۱۳) اگر

ا جم عہ جم بہ + ب جب عہ جب بہ = ج، ا جم بہ جم جہ + ب جب بہ جب جہ = ج،

ا جم جہ جم ضہ + ب جب جہ جب ضہ = ج، ا جم ضہ جم صہ + ب جب ضہ جب صہ = ج

اور ا جم صہ جم عہ + ب جب صہ جب عہ = ج

تو ثابت کرو کہ

۱/ا³ + ۱/ب³ + ۱/ج³ = (۱/ب + ۱/ج)(۱/ج + ۱/ا)(۱/ا + ۱/ب)

جہاں زاویے سب کے سب غیر مساوی، اور صفر اور ۲ π کے درمیان ہیں۔

(۱۴) اگر

جب (ط + عہ) = جب (فہ + عہ) = جب بہ

اور ا جب (ط + فہ) + ب جب (ط − فہ) = ج

تو ثابت کرو کہ یا

ا جب (۲ عہ ± ۲ بہ) = − ج، یا ا جب ۲ عہ ± ب جب ۲ بہ = ج

(۱۵) اگر مساوات جب^(۲ن+۲) ط / جب^(۲ن) عہ + جم^(۲ن+۲) ط / جم^(۲ن) عہ = ۱

درست رہے جبکہ ن = ۱ تو ثابت کرو کہ وہ درست رہیگی جبکہ ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو۔

(۱۶) مساواتوں

۴ (جم عہ جم طہ + جم فہ) (جم عہ جب طہ + جب فہ)

= ۴ (جم عہ جم طہ + جم پہ) (جم عہ جب طہ + جب پہ) = (جم فہ - جم پہ) (جب فہ - جب پہ)

سے طہ ساقط کرو، اور ثابت کرو کہ جم (فہ - پہ) = ۱، یا جم ۲ عہ

(۱۷) اگر مس ما / مس بہ = جب (لا - عہ) / جب عہ ، اور مس ما / مس ۲ بہ = جب (لا - ۲ عہ) / جب ۲ عہ

تو ثابت کرو کہ مس ما / جب ۲ بہ = جب لا / جب ۲ عہ = جم لا / (جم ۲ عہ - جم ۲ بہ)

(۱۸) اگر عہ، بہ، جہ، غیر مساوی ہوں اور ہر ایک π سے کم تو ثابت کرو کہ مساواتوں کا نظام

جب (۲ عہ - بہ - جہ) / جم (۲ عہ + بہ + جہ) = جب (۲ بہ - جہ - عہ) / جم (۲ بہ + جہ + عہ) = جب (۲ جہ - عہ - بہ) / جم (۲ جہ + عہ + بہ)

ایک واحد مساوات

جم ۲ (بہ + جہ) + جم ۲ (جہ + عہ) + جم ۲ (عہ + بہ) = ۰

کے مماثل ہے۔

(۱۹) اگر لا = ۲ جم (بہ - جہ) + جم (طہ + عہ) + جم (طہ - عہ)

= ۲ جم (جہ - عہ) + جم (طہ + بہ) + جم (طہ - بہ)

= -۲ جم (عہ - بہ) - جم (طہ + جہ) - جم (طہ - جہ)

تو ثابت کرو کہ لا = جب² طہ اگر زاویوں عہ، بہ، جہ میں سے کسی دو کا فرق نہ معدوم ہو اور نہ π کے کسی ضعف کے مساوی ہو۔

(۲۰) اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° اور اگر

∑ جب (۲ن + ۱) ا جب (ب − ج) = ۰

جہاں ن ایک صحیح عدد ہے تو ثابت کرو کہ

∑ جب (ن − ۱) ا جب (ن + ۱) (ب − ج) = ۰

(97) (۲۱) اگر مم ½(عہ + بہ) (جم جہ − جم ضہ) + مم ½(عہ + جہ) (جم ضہ − جم بہ)
+ مم ½ (عہ + ضہ) (جم بہ − جم جہ) = ۰

اور کوئی دو زاویے مساوی نہ ہوں، یا کسی دو زاویوں میں π کے ضعف کا فرق نہ ہو تو ثابت کرو کہ

مم ½(بہ + عہ) (جم جہ − جم ضہ) + مم ½ (بہ + جہ) (جم ضہ − جم عہ)
+ مم ½ (بہ + ضہ) (جم عہ − جم جہ) = ۰

(۲۲) اگر $\frac{\text{جب (عہ + طہ)}}{\text{جب (عہ + فہ)}} + \frac{\text{جب (بہ + طہ)}}{\text{جب (بہ + فہ)}} = \frac{\text{جم (عہ + طہ)}}{\text{جم (عہ + فہ)}} + \frac{\text{جم (بہ + طہ)}}{\text{جم (بہ + فہ)}} = ۲$

تو ثابت کرو کہ یا تو عہ اور بہ میں ½π کے طاق ضعف کا فرق ہے، یا طہ اور فہ میں π کے جفت ضعف کا فرق ہے۔

(۲۳) اگر ا جم (فہ + پہ) + ب جم (فہ − پہ) + ج = ۰،

ا جم (پہ + طہ) + ب جم (پہ − طہ) + ج = ۰،

ا جم (طہ + فہ) + ب جم (طہ − فہ) + ج = ۰،

اور اگر طہ، پہ، فہ سب غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ا² − ب² + ۲ب ج = ۰

(۲۴) اگر $\frac{\text{جم (عہ + بہ + طہ)}}{\text{جب (عہ + بہ) جم}^2\text{ جہ}} = \frac{\text{جم (جہ + عہ + طہ)}}{\text{جم (جہ + عہ) جم}^2\text{ بہ}}$

اور ب، ج غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات بالا کا ہر رکن

$$= \frac{\text{جم}\,(\text{ب} + \text{ج} + \text{ط})}{\text{جب}\,(\text{ب} + \text{ج})\,\text{جم}^{2}\,\text{ء}}$$

اور

$$\text{جم ط} = \frac{\text{جب}\,(\text{ب}+\text{ج})\,\text{جب}\,(\text{ج}+\text{ء})\,\text{جب}\,(\text{ء}+\text{ب})}{\text{جم}\,(\text{ب}+\text{ج})\,.\,\text{جم}\,(\text{ج}+\text{ء})\,.\,\text{جم}\,(\text{ء}+\text{ب}) + \text{جب}^{2}\,(\text{ء}+\text{ب}+\text{ج})}$$

(۲۵) اگر ا، ب، ج مثبت زاویے ہوں جن کا مجموعہ ۱۸۰° ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم ا} + \text{جم ب} + \text{جم ج} > 1 \quad \text{اور} \quad \not> \frac{3}{2}$$

(۲۶) حل کرو مساوات

$$64\,\text{جب}^{7}\,\text{ط} + \text{جب}\,7\,\text{ط} = 0$$

(۲۷) اگر $2\,\text{س} = \text{لا} + \text{ما} + \text{ی}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\,(\text{س} - \text{لا}) + \text{مس}\,(\text{س} - \text{ما}) + \text{مس}\,(\text{س} - \text{ی}) - \text{مس س}$$

$$= \frac{4\,\text{جب لا جب ما جب ی}}{1 - \text{جم}^{2}\,\text{لا} - \text{جم}^{2}\,\text{ما} - \text{جم}^{2}\,\text{ی} - 2\,\text{جم لا جم ما جم ی}}\text{،}$$

نیز

$$\text{مس}^{-1}\,(\text{س} - \text{لا}) + \text{مس}^{-1}\,(\text{س} - \text{ما}) + \text{مس}^{-1}\,(\text{س} - \text{ی}) - \text{مس}^{-1}\,\text{س}$$

$$= \text{مس}^{-1}\,\frac{16\,\text{لا ما ی}}{(\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + \text{ی}^{2} + 4)^{2} - 4\,(\text{ما}^{2}\,\text{ی}^{2} + \text{ی}^{2}\,\text{لا}^{2} + \text{لا}^{2}\,\text{ما}^{2})}$$

(۲۸) اگر

$$\frac{\text{جم ط}}{\text{جم ء}} + \frac{\text{جب ط}}{\text{جب ء}} = \frac{\text{جم ف}}{\text{جم ء}} + \frac{\text{جب ف}}{\text{جب ء}} = 1$$

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم ط جم ف}}{\text{جم}^{2}\,\text{ء}} + \frac{\text{جب ط جب ف}}{\text{جب}^{2}\,\text{ء}} + 1 = 0$$

(٢٩) اگر　　٢ جب عہ جم (ط + فہ) = ٢ جم (ط − فہ) + جم^2 عہ ،

اور　　٢ جب عہ جم (ط + پہ) = ٢ جم (پہ − ط) + جم^2 عہ ،

تو ثابت کرو کہ　　٢ جب عہ جم (فہ + پہ) = ٢ جم (فہ − پہ) + جم^2 عہ

(٣٠) اگر　　جم (ما − ی) + جم (ی − لا) + جم (لا − ما) = − ٣/٢

تو ط کی تمام قیمتوں کے لیے ثابت کرو کہ

جم^3 (لا + ط) + جم^3 (ما + ط) + جم^3 (ی + ط) − ٣ جم (لا + ط) جم (ما + ط) جم (ی + ط) = ٠

(٣١) اگر

جب ر ا / ل = جب (ر + ١) ا / م = جب (ر + ٢) ا / ن

تو ثابت کرو کہ

جم ر ا / (٢ م^2 − ل (ل + ن)) = جم (ر + ١) ا / (م (ن − ل)) = جم (ر + ٢) ا / (ن (ل + ن) − ٢ م^2)

(٣٢) ثابت کرو کہ مساواتیں

(لا + ١/لا) جب عہ = ما/ی + ی/ما + جم^2 عہ ،

(ما + ١/ما) جب عہ = ی/لا + لا/ی + جم^2 عہ ،

(ی + ١/ی) جب عہ = لا/ما + ما/لا + جم^2 عہ

غیر تابع نہیں ہیں اور وہ

لا + ما + ی = ١/لا + ١/ما + ١/ی = − جب عہ

کے مماثل ہیں ۔

٣٣ ۔ ثابت کرو کہ جملہ

۲ جم (بہ - جہ) جم (ط + بہ) جم (ط + جہ) + ۲ جم (جہ - عہ) جم (ط + جہ) جم (ط + جہ)
+ ۲ جم (عہ - بہ) جم (ط + عہ) جم (ط + بہ) - جم ۲ (ط + عہ) - جم ۲ (ط + بہ) - جم ۲ (ط + جہ) - ۱
ط پر منحصر نہیں ہے، اس کی قیمت جیوب التمام کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کرو۔

(۳۴) اگر مساوات

مس (ط + ۱/۴ π) = ۳ مس ۳ ط

کے چار حل عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں اور ان میں سے کسی دو کے مماس مساوی نہ ہوں تو ثابت کرو کہ

مس عہ + مس بہ + مس جہ + مس ضہ = ۰

مس ۲ عہ + مس ۲ بہ + مس ۲ جہ + مس ۲ ضہ = ۴/۳

(۳۵) اگر ۲ مس (ر + ی) = ۳ مس (ر + لا) = ۶ مس (ر + لا)

تو ثابت کرو کہ ۳ جب² (لا - ما) + ۵ جب² (ما - ی) - ۲ جب² (ی - لا) = ۰

(۳۶) حل کرو مساواتیں

جب⁻¹ لا - جب⁻¹ ما = ۲/۳ π
جم⁻¹ لا - جم⁻¹ ما = ۱/۳ π

(۳۷) ثابت کرو کہ مسلسل کسر

1 / (۲ مس عہ + 1 / (۲ مس عہ + 1 / (۲ مس عہ + ...

کا ن واں مستدق ہے

((مس عہ + قطعہ)^ن - (مس عہ - قطعہ)^ن) / ((مس عہ + قطعہ)^(ن+۱) - (مس عہ - قطعہ)^(ن+۱))

(۳۸) مساواتوں

۳ ر جم ط + ر جم ۳ ط = ۴ لا
۲ ر جب ط - ر جب ۳ ط = ۴ ما

سے ط ساقط کرو۔

(۳۹) اگر　مس (ط - ع) / ف = مس (فہ - ع) / ق = مس (پہ - ع) / ر　(۹۹)

تو ثابت کرو کہ

ف (ق - ر)^{۲} جم (فہ - پہ) + ق (ر - ف)^{۲} جم (پہ - ط) + ر (ف - ق)^{۲} جم (ط - فہ) = ۰

(۴۰)　۱ / (۱ + ا جم ط + ب جب ط)　کو اس شکل

ا + ا$_{۱}$ جم (ط - ع) + ا$_{۲}$ جم ۲ (ط - ع) + ...

کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ۔

(۴۱) مساوات　مس ۳ ط - مس ۲ ط - مس ط = ۰ کو حل کرو۔

(۴۲) اگر

جم^{۳} لا + جم^{۳} ما = جم ۳ ع، جب^{۳} لا + جب^{۳} ما = جب ۳ ع اور لا + ما = ۲ ہ

تو ثابت کرو کہ

۸ جب^{۲} ۳ (ع + ہ) = ۲۷ جب ۲ ہ جب^{۲} ۴ ہ جم (۳ ع + ہ)

(۴۳) اگر　ا جم فہ جم پہ + ب جب فہ جب پہ = ج،

ا جم پہ جم ط + ب جب پہ جب ط = ج،

ا جم ط جم فہ + ب جب ط جب فہ = ج

تو ثابت کرو کہ　ب ج + ج ا + ا ب = ۰، اِلّا آنکہ ا = ب = ج

(۴۴) حل کرو مساوات

جم$^{-۱}$ (لا + ۱/۲) + جم$^{-۱}$ لا + جم$^{-۱}$ (لا - ۱/۲) = ۳/۲ π

(۴۵) مساواتوں

ا^{3} ما جب فہ + ب^{3} لا جم فہ + ا ب (ا^{2} جب^{2} فہ + ب) جم^{2} فہ = ۰،

ا لا قط فہ − ب ما قم فہ = ا^{2} − ب^{2}

سے فہ ساقط کرو۔

(۴۶) حل کرو مساوات

جم ۵ ط + ۵ جم ۳ ط + ۱۰ جم ط = $\frac{1}{2}$

(۴۷) مساواتوں

ا جم ط . جم ۲ ط = ۲ (ا جم ط − لا)،

ا جب ط جب ۲ ط = ۲ (ا جب ط − ما)

سے ط ساقط کرو۔

(۴۸) ثابت کرو کہ مساوات ۳ لا + ما = ن (جہاں ن صحیح عدد ہے) کے حل مثبت صحیح اعداد میں (بشمول صفر) معلوم کیے جائیں تو ان کی تعداد ہے

$$\frac{1}{3}\left[ن + 2 + (-1)^{ن} \quad \frac{جم\ \frac{1}{6}(2ن+1)\pi}{جم\ \frac{1}{6}\pi}\right]$$

(۴۹) حل کرو مساوات

۶ جم ۳ ط − جب ۳ ط − ۱۰ جم ۲ ط + ۵ جب ۲ ط + ۲۲ جم ط − ۵ جب ط = ۱۰

(۵۰)

$$\frac{قم^{2}\ ط - مس^{2}\ ط}{جم^{2}\ ط + مس^{2}\ ط - 1}$$

کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو۔

(100) (۵۱) ثابت کرو کہ کسر مسلسل

$$\frac{قط^{2}\ عہ}{4 -}\ \frac{قط^{2}\ عہ}{4 -}\ \frac{قط^{2}\ عہ}{4 -} \ldots\ldots$$ ر خارج قسمتوں تک

$$= \frac{جب\ ر عہ}{2\ جب\ (ر+1)\ عہ\ جم\ عہ}$$

(۵۲) مساواتوں

ا جب (ط - عہ) + ب جب (ط + عہ) = لا جب (فہ + بہ) + ما جب (فہ - بہ)،

ا جم (ط - عہ) - ب جم (ط + عہ) = لا جم (فہ + بہ) - ما جم (فہ - بہ)

ط ± فہ = جہ

سے ط، فہ ساقط کرو۔

(۵۳) ثابت کرو کہ

Σ جم عہ (جم ۳ بہ - جم ۳ جہ)

= ۴ (جم بہ - جم جہ) (جم جہ - جم عہ) (جم عہ - جم بہ) (جم عہ + جم بہ + جم جہ)

(۵۴) اگر ا جم عہ + ب جم بہ + ج جم جہ = ۰،

ا جب عہ + ب جب بہ + ج جب جہ = ۰،

ا قط عہ + ب قط بہ + ج قط جہ = ۰

تو ثابت کرو کہ بالعموم ± ا ± ب ± ج = ۰

(۵۵) مساواتوں

جب۳ ($\frac{1}{4}\pi$ + ط) + ۳ جب ($\frac{1}{4}\pi$ + ط) = ۲ ا،

جب۳ ($\frac{1}{4}\pi$ - ط) + ۳ جب ($\frac{1}{4}\pi$ - ط) = ۲ ب

سے ط ساقط کرو۔

(۵۶) اگر مساوات مس (ط + عہ) = ک مس ۲ ط

کو پورا کرنیوالی ط کی قیمتیں $ط_1$، $ط_2$، $ط_3$ ہوں اور ان میں سے کسی دو میں π کے ضعف کا فرق نہ ہو تو ثابت کرو کہ

$ط_1$ + $ط_2$ + $ط_3$ + عہ

π کا ایک ضعف ہے۔

(۵۷) ثابت کرو کہ

$$\sum \frac{\text{جم ۲ ا}}{\text{جب ا جب (ا - ب) جب (ا - ج)}} = \text{۸ جب (ا + ب + ج) + قم ا قم ب قم ج}$$

(۵۸) ثابت کرو کہ

۲ {جب^{۳} (ط - ع) جم ۲ (ع - ف) جب (ب - ج) + جب^{۳} (ط - ب) جم ۲ (ب - ف) جب (ج - ع)
+ جب^{۳} (ط - ج) جم ۲ (ج - ف) جب (ع - ب) }
= {جب ۲ ع + جب ۲ ب + جب ۲ ج - ۳ جب ۲ ط} جب (ب - ج) جب (ج - ع) جب (ع - ب)

جہاں ف = $\frac{۱}{۲}$ (ع + ب + ج - ۳ ط)

(۵۹) اگر ا + ب + ج + د = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

(س - جب ا) (س - جب ب) (س - جب ج) (س - جب د)
= $\frac{۱}{۴}$ (جب ا جب ب + جب ج جب د) (جب ب جب ج + جب ا جب د)
(جب ج جب ا + جب ب جب د)

جہاں ۲ س = جب ا + جب ب + جب ج + جب د

(۶۰) ثابت کرو کہ سلسلہ (101)

جم ع + جم (ع + ب) + جم (ع + ۲ ب) + ...

کی ن رقموں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ جبکہ ان میں سے دو دو کو لیکر ضرب دیا جائے یہ ہے

$\frac{۱}{۴}$ قم^{۲} $\frac{۱}{۲}$ ب قط $\frac{۱}{۲}$ ب جب $\frac{۱}{۲}$ ن ب [جب $\frac{۱}{۲}$ ن ب جم $\frac{۱}{۲}$ ب + جب $\frac{۱}{۲}$ (ن - ۱) ب
× جم {۲ ع + (ن - ۱) ب}] - $\frac{۱}{۴}$ ن

(۶۱) اگر

$$\frac{\text{جم ط + جب ط}}{\text{۲ + جم ۲ ط + جب ۲ ط}} = \frac{\text{۴ (جم ط - جب ط) (جم ۲ ط - جب ۲ ط)}}{\text{۴ (جم ۲ ط - جب ۲ ط)}^{۲} - \text{(جم ط - جب ط)}^{۲}}$$

تو ثابت کرو کہ ط کی تین قیمتیں ہونگی ایسی کہ

مس ط$_{۱}$ + مس ط$_{۲}$ + مس ط$_{۳}$ = ۹

(۶۲) اگر مس ۲ طہ مس طہ = مس ۲ فہ - مس فہ = مس ۲ پہ - مس پہ
تو ثابت کرو کہ طہ + فہ + پہ، ۱/۲ π کا ایک طاق ضعف ہے بشرطیکہ مس طہ،
مس فہ، مس پہ سب غیر مساوی ہوں۔

(۶۳) اگر
لا جم عہ + ما جب عہ + ی + جم ۲ عہ = ۰،
لا جم بہ + ما جب بہ + ی + جم ۲ بہ = ۰،
لا جم جہ + ما جب جہ + ی + جم ۲ جہ = ۰،

تو ثابت کرو کہ

لا جم فہ + ما جب فہ + ی + جم ۲ فہ
= ۸ جب ۱/۲ (عہ + بہ + جہ + فہ) جب ۱/۲ (فہ - عہ) جب ۱/۲ (فہ - بہ) جب ۱/۲ (فہ - جہ)

(۶۴) مساواتوں

مس طہ + مس فہ = ا،
قط طہ + قط فہ = ب،
قم طہ + قم فہ = ج

سے طہ اور فہ ساقط کرو اور ثابت کرو کہ اگر ب اور ج ہم علامت ہوں تو

ب ج > ۲ ا

(۶۵) ثابت کرو کہ مساواتوں

جم (طہ - ۳ عہ) / جم³ عہ = جم (طہ - ۳ بہ) / جم³ بہ = جم (طہ - ۳ جہ) / جم³ جہ

سے طہ کو ساقط کیا جائے تو نتیجہ حاصل ہوتا ہے

جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ) {جم (عہ + بہ + جہ) - ۴ جم عہ جم بہ جم جہ} = ۰

(۶۶) اگر (۱ - لا + لا²)⁻¹ کو لا کی قوتوں میں پھیلایا جائے تو ثابت کرو کہ لاⁿ کا سر

جب ۱/۳ (ن + ۱) π \ جب ۱/۳ π ہے۔

(۶۷) ثابت کرو کہ Σ جم ۴ عہ جب (بہ + جہ) جب (بہ - جہ)
= - ۸ جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ) جب (بہ + جہ) جب (جہ + عہ) جب (عہ + بہ)

(۶۸) ثابت کرو کہ

Σ جم ۲ (ب + جہ - عہ) جب (ب - جہ) جم عہ

= ۸ جب (ب - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - ب) جم عہ جم ب جم جہ

(۶۹) اگر　ا جب ط + ب جم ط = ا قم ط + ب قط ط

تو ثابت کرو کہ مساوات کا ہر رکن

= $\frac{1}{2}$ (ب$^{\frac{2}{3}}$ + ا$^{\frac{2}{3}}$) (ا$^{\frac{2}{3}}$ - ب$^{\frac{2}{3}}$)

(۷۰) جب (ب - جہ) + جب (جہ - عہ) + جب (عہ - ب)

کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو۔

۷۱ - حل کرو مساوات (102)

جم (لا - ا) . جم (لا - ب) . جم (لا - ج)

= جب ا جب ب جب ج جب لا + جم ا . جم ب جم ج . جم لا

(۷۲) حل کرو مساوات

جم ۲ لا + جم ۲ (لا - ا) + جم ۲ (لا - ب) + جم ۲ (لا - ج) = ۴ جم ا جم ب . جم ج

(۷۳) حل کرو مساوات

جب^{3} ۳ ا + جب^{3} ۲ ا = جب^{3} ا (جب ۳ ا + جب ۲ ا)

(۷۴) مساواتوں

ا . جم ۲ ط + ب جب ۲ ط = ج،

اَ . جم ۳ ط + بَ جب ۳ ط = ۰

سے ط ساقط کرو۔

(۷۵) اگر ا + ب + ج = ۱۸۰$^{\circ}$ تو ثابت کرو کہ

جب^{2} $\frac{1}{2}$ ب جب^{2} $\frac{1}{2}$ ج + جب^{2} $\frac{1}{2}$ ج جب^{2} $\frac{1}{2}$ ا + جب^{2} $\frac{1}{2}$ ا جب^{2} $\frac{1}{2}$ ب

$\not<$ $\frac{1}{12}$ (جب^{2} ا + جب^{2} ب + جب^{2} ج)

(۷۶) مساواتوں

۴ لا = ۵ ا جم ط − ا جم ۵ ط،

۴ ما = ۵ ا جب ط − ا جب ۵ ط

سے ط ساقط کرو ـ

(۷۷) اگر جم ۲ ا جب (ب − ج) قط (ب + ج)

= جم ۲ ب جب (ج − ع) قط (ج + ع) = جم ۲ ج جب (ع − ب) قط (ع + ب)

تو ثابت کرو کہ

جم ۲ ع + جم ۲ ب + جم ۲ ج = ۰،

اور جب ۲ (ب + ج) + جب ۲ (ج + ع) + جب ۲ (ع + ب) = ۰

(۷۸) ثابت کرو کہ

$\sum_{\text{م}=0}^{\text{م}=\text{م}}$ جم (م ع + ب) = جم ($\frac{1}{2}$ ھ ع + ب) جب $\frac{1}{2}$ (ھ + ۱) ع قم $\frac{1}{2}$ ع

اور $\sum_{\text{م}=0}^{\text{م}=\text{م}} \sum_{\text{ن}=0}^{\text{ن}=\text{ن}} \sum_{\text{پ}=0}^{\text{پ}=\text{پ}}$ ... جم (م ع + ن ب + پ ج + ...)

= جم $\frac{1}{2}$ (ھ ع + ن ب + پ ج + ...) جب $\frac{1}{2}$ (ھ + ۱) ع جب $\frac{1}{2}$ (ن + ۱) ب ....

× قم $\frac{1}{2}$ ع قم $\frac{1}{2}$ ب .....

امثلہ ۷۹ تا ۹۳ کے حسب ذیل سلسلوں کو ن رقموں تک جمع کرو:—

(۷۹) جب^2 ع + جب^2 ۲ ع + جب^2 ۳ ع + ... + جب^2 ن ع

(۸۰) جب^2 ع جب ۲ ع + جب^2 ۲ ع جب ۳ ع + ... + جب^2 ن ع جب (ن + ۱) ع

(۸۱) قم ع قم (ع + ب) + قم (ع + ب) قم (ع + ۲ ب) + قم (ع + ۲ ب) قم (ع + ۳ ب)

\+ ... + قم {ع + (ن − ۱) ب} قم (ع + ن ب)

(۸۲) $\text{جب لا جب ۲ لا جب ۳ لا} + \text{جب ۲ لا جب ۳ لا جب ۴ لا} + \cdots + \text{جب ن لا جب (ن+۱) لا جب (ن+۲) لا}$

(۸۳) $\text{جب}^{۳}\,\text{عہ} + \frac{۱}{۳}\,\text{جب}^{۳}\,۳\,\text{عہ} + \frac{۱}{۳^{۲}}\,\text{جب}^{۳}\,۳^{۲}\,\text{عہ} + \cdots + \frac{۱}{۳^{\text{ن}-۱}}\,\text{جب}^{۳}\,۳^{\text{ن}-۱}\,\text{عہ}$

(۸۴) $\text{مس ط مس ۳ ط} + \text{مس ۲ ط مس ۴ ط} + \cdots + \text{مس ن ط مس (ن+۲) ط}$

(۸۵) $\text{مس ط قط ۲ ط} + \text{مس ۲ ط قط}\,۲^{۲}\,\text{ط} + \cdots + \text{مس}\,۲^{\text{ن}-۱}\,\text{ط قط}\,۲^{\text{ن}}\,\text{ط}$ (103)

(۸۶) $\text{مس لا} + \frac{۱}{۲}\,\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲} + \frac{۱}{۴}\,\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲^{\text{ن}-۱}}\,\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲^{\text{ن}-۱}}$

(۸۷) $\text{مس لا قط}^{۲}\,\text{لا} + \frac{۱}{۸}\,\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲}\,\text{قط}^{۲}\,\frac{\text{لا}}{۲} + \frac{۱}{۸^{۲}}\,\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲^{۲}}\,\text{قط}^{۲}\,\frac{\text{لا}}{۲^{۲}} + \cdots + \frac{۱}{۸^{\text{ن}-۱}}\,\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲^{\text{ن}-۱}}\,\text{قط}^{۲}\,\frac{\text{لا}}{۲^{\text{ن}-۱}}$

(۸۸) $۱ + \text{ج جم ط جم فہ} + \text{ج}^{۲}\,\text{جم ۲ ط جم ۲ فہ} + \cdots + \text{ج}^{\text{ن}-۱}\,\text{جم (ن-۱) ط جم (ن-۱) فہ}$

(۸۹) $\frac{\text{جم ۲ ط}}{\text{جب}^{۲}\,۲\,\text{ط}} + \frac{۲\,\text{جم ۴ ط}}{\text{جب}^{۲}\,۴\,\text{ط}} + \frac{۴\,\text{جم ۸ ط}}{\text{جب}^{۲}\,۸\,\text{ط}} + \cdots + \frac{۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جم}\,۲^{\text{ن}}\,\text{ط}}{\text{جب}^{۲}\,۲^{\text{ن}}\,\text{ط}}$

(۹۰) $\frac{\text{جب ط}}{\text{جم ط} + \text{جم}^{۲}\,\text{ط}} + \frac{\text{جب ۲ ط}}{\text{جم ۲ ط} + \text{جم}^{۲}\,۲\,\text{ط}} + \cdots + \frac{\text{جب ن ط}}{\text{جم ن ط} + \text{جم}^{۲}\,\text{ن ط}}$

(۹۱) $\frac{\text{جم ۲ عہ}}{۱ - \text{جم}^{۲}\,۲\,\text{عہ قط}^{۲}\,\text{عہ}} + \frac{\text{جم ۳ عہ}}{۱ - \text{جم}^{۲}\,۳\,\text{عہ قط}^{۲}\,\text{عہ}} + \cdots + \frac{\text{جم (ن+۱) عہ}}{۱ - \text{جم}^{۲}\,\text{(ن+۱) عہ قط}^{۲}\,\text{عہ}}$

(۹۲) $۱ \times ۳\,\text{جب}\,\frac{\pi}{\text{ن}} + ۳ \times ۵\,\text{جب}\,\frac{۳\pi}{\text{ن}} + \cdots + (۲\text{ن}-۱)(۲\text{ن}+۱)\,\text{جب}\,\frac{(۲\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}$

(۹۳) $۳ \times ۴\,\text{جب عہ} + ۴ \times ۵\,\text{جب ۲ عہ} + \cdots + (\text{ن}+۲)(\text{ن}+۳)\,\text{جب ن عہ}$

(۹۴) اگر مساوات

$$\text{جب (ط+عہ)} + \text{جب (ط+بہ)} + \text{جب (عہ+بہ)} = ۰$$

کے دو حل ط۱، ط۲ ہوں جہاں ط۱، ط۲، عہ، بہ میں سے ہر ایک ۲ π سے کم ہے تو ثابت کرو کہ

جب (ط۱ + ط۲) + جب (بہ + ط۱) + جب (بہ + ط۲) = ۰

(۹۵) ۔ ثابت کرو کہ

۱/۲ مم^{-۱} (۲ ∛۴ + ۱)/√۳ + ۱/۳ مس^{-۱} (∛۴ + ۱)/√۳ = ۱/۶ π

اور ۱/۲ مس^{-۱} (∛۲ + ۱)/√۳ − ۱/۳ مس^{-۱} (۲ ∛۲ + ۱)/√۳ = ۱/۳۶ π

(۹۶) اگر ط کی چار غیر مساوی قیمتیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہر ایک ۲ π سے کم ہو اور وہ مساوات

جم ۲ (لہ − ط) + جم (مہ − ط) + جم نہ = ۰

کو پورا کریں تو ثابت کرو کہ

عہ + بہ + جہ + ضہ − ۴ لہ = ۲ ن π ،

اور جب ۱/۲ (بہ + جہ + ضہ − عہ − ۲ مہ) + جب ۱/۲ (جہ + ضہ + عہ − بہ − ۲ مہ)

+ جب ۱/۲ (ضہ + عہ + بہ − جہ − ۲ مہ) + جب ۱/۲ (عہ + بہ + جہ − ضہ − ۲ مہ) = ۰

(104)

ساتواں باب

ضعفی زاویوں کے تفاعلوں کو پھیلانا

جیب یا جیب التمام کی نزولی قوتوں میں سلسلہ

۸۷ — دفعہ ۱۵ کے ضابطہ (۴۰) میں اگر ہم $\text{جب}^{۲}$ ا کی بجائے اس کی قیمت $(\text{۱} - \text{جم}^{۲}\,\text{ا})^{\text{ر}}$ لکھیں اور سلسلہ کو جم ا کی قوتوں میں ترتیب دیں تو جم ن ا کے لیے صرف جم ا کی قوتوں میں ایک جملہ حاصل ہوگا۔ ا کی بجائے ط رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم ن ط} = \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{ط} - \frac{\text{ن(ن}-\text{۱)}}{\underline{|\text{۲}}}\,\text{جم}^{\text{ن}-\text{۲}}\,\text{ط}\,(\text{۱}-\text{جم}^{\text{۲}}\,\text{ط}) + \ldots\ldots$$

$$+ (-\text{۱})^{\text{ر}}\,\frac{\text{ن(ن}-\text{۱)}\ldots(\text{ن}-\text{۲ر}+\text{۱})}{\underline{|\text{۲ر}}}\,\text{جم}^{\text{ن}-\text{۲ر}}\,\text{ط}\,(\text{۱}-\text{جم}^{\text{۲}}\,\text{ط})^{\text{ر}} + \ldots$$

اِس سلسلہ میں $(-\text{۱})^{\text{ر}}\,\text{جم}^{\text{ن}-\text{۲ر}}\,\text{ط}$ کا سر ہے

$$\frac{\text{ن(ن}-\text{۱)}\ldots(\text{ن}-\text{۲ر}+\text{۱})}{\underline{|\text{۲ر}}} + \frac{\text{ن(ن}-\text{۱)}\ldots(\text{ن}-\text{۲ر}-\text{۱})}{\underline{|\text{۲ر}+\text{۲}}}\,(\text{ر}+\text{۱})$$

$$+ \frac{\text{ن(ن}-\text{۱)}\ldots(\text{ن}-\text{۲ر}-\text{۳})}{\underline{|\text{۲ر}+\text{۴}}} \times \frac{(\text{ر}+\text{۱})(\text{ر}+\text{۲})}{\underline{|\text{۲}}} + \ldots$$

یہ سر $(\text{۱}+\text{لا})^{\text{ن}}$ اور $(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۲}}})^{-(\text{ر}+\text{۱})}$ کے حاصل ضرب میں $\text{لا}^{\text{۲ر}}$ کا جو

سر ہے اُس کے مساوی ہے جہاں لا کو ایک سے بڑا فرض کیا گیا ہے؛ اس لیے یہ سر، اُس سر کے مساوی ہے جو $(۱+لا)^{ن-ر-۱}(۱-\frac{۱}{لا})^{-(ر+۱)}$ کے پھیلاؤ میں $لا^{ر-۱}$ کا ہے۔ یہ آخری سر

$$= \frac{(ن-ر-۱)\cdots(ن-۲ر+۱)}{\lfloor ر}\Big\{ ر+(ن-۲ر)(ر+۱)+\frac{(ن-۲ر)(ن-۲ر-۱)}{\lfloor ۲}(ر+۲)+\cdots\Big\}$$

(105)

اور یہ

$$= \frac{(ن-ر-۱)\cdots(ن-۲ر+۱)}{\lfloor ر}\Big\{ ر(۱+۱)^{ن-۲ر}+(ن-۲ر)(۱+۱)^{ن-۲ر-۱}\Big\}$$

$$= \frac{ن(ن-ر-۱)\cdots(ن-۲ر+۱)}{\lfloor ر}\,۲^{ن-۲ر-۱}$$

$جم^{ن} ط$ کا سر $\frac{۱}{۲}\{(۱+۱)^{ن}+(۱-۱)^{ن}\}$ یعنی $۲^{ن-۱}$ حاصل ہوتا ہے۔ $جم^{ن-۲} ط$ کا سر $(۱+لا)^{ن-۲}(۱-\frac{۱}{لا})^{-۲}$ کے پھیلاؤ میں اُس رقم کے مساوی ہے جس میں لا شامل نہیں ہوتا اور یہ رقم ہے $(۱+۱)^{ن-۲}+(ن-۲)(۱+۱)^{ن-۳}$ یا

$$ن\times ۲^{ن-۳}$$

پس

$$جم\,ن\,ط = ۲^{ن-۱}\,جم^{ن} ط - \frac{ن}{\lfloor ۱}\,۲^{ن-۳}\,جم^{ن-۲} ط + \frac{ن(ن-۳)}{\lfloor ۲}\,۲^{ن-۵}\,جم^{ن-۴} ط \ldots (۱)$$

اس کی عام رقم ہے

$$(-۱)^{ر}\,\frac{ن(ن-ر-۱)\cdots(ن-۲ر+۱)}{\lfloor ر}\,۲^{ن-۲ر-۱}\,جم^{ن-۲ر} ط$$

اسی طرح دفعہ ۱۵ کے ضابطہ (۳۹) سے ہمیں سلسلہ ملتا ہے

$$\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}} = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جم}^{\text{ن}-۱}\,\text{ط} - \frac{\text{ن}-۲}{۱}\,۲^{\text{ن}-۳}\,\text{جم}^{\text{ن}-۳}\,\text{ط}$$

$$+ \frac{(\text{ن}-۳)(\text{ن}-۴)}{\underline{|۲}}\,۲^{\text{ن}-۵}\,\text{جم}^{\text{ن}-۵}\,\text{ط} \ldots\ldots (۲)$$

اور اس کی عام رقم ہے

$$(-۱)^{\text{ر}}\,\frac{(\text{ن}-\text{ر}-۱)\ldots(\text{ن}-۲\text{ر})}{\underline{|\text{ر}}}\,۲^{\text{ن}-۲\text{ر}-۱}\,\text{جم}^{\text{ن}-۲\text{ر}-۱}\,\text{ط}$$

۷۹ — اگر ضابطوں (۱) اور (۲) میں ط کو $\frac{۱}{۲}\pi$ — ط میں تبدیل کریں تو ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\,\text{جم ن ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{ط} - \frac{\text{ن}}{۱}\,۲^{\text{ن}-۳}\,\text{جب}^{\text{ن}-۲}\,\text{ط} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۳)}{\underline{|۲}}\,۲^{\text{ن}-۵}\,\text{جب}^{\text{ن}-۴}\,\text{ط}$$

$$- \ldots\ldots\ldots (۳)$$

$$(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}-۱}\,\text{جب ن ط} \,\backslash\, \text{جم ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}^{\text{ن}-۱}\,\text{ط} - \frac{\text{ن}-۲}{۱}\,۲^{\text{ن}-۳}\,\text{جب}^{\text{ن}-۳}\,\text{ط}$$

$$+ \frac{(\text{ن}-۳)(\text{ن}-۴)}{\underline{|۲}}\,۲^{\text{ن}-۵}\,\text{جب}^{\text{ن}-۵}\,\text{ط} - \ldots (۴)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$(-۱)^{\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۱)}\,\text{جب ن ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{ط} - \frac{\text{ن}}{۱}\,۲^{\text{ن}-۳}\,\text{جب}^{\text{ن}-۲}\,\text{ط}$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-۳)}{\underline{|۲}}\,۲^{\text{ن}-۵}\,\text{جب}^{\text{ن}-۴}\,\text{ط} - \ldots (۵)$$

(106)

$$(-۱)^{\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۱)}\,\text{جم ن ط} \,\backslash\, \text{جم ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}^{\text{ن}-۱}\,\text{ط} - \frac{\text{ن}-۲}{۱}\,۲^{\text{ن}-۳}\,\text{جب}^{\text{ن}-۳}\,\text{ط}$$

$$+ \frac{(\text{ن}-۳)(\text{ن}-۴)}{\underline{|۲}}\,۲^{\text{ن}-۵}\,\text{جب}^{\text{ن}-۵}\,\text{ط} - \ldots (۶)$$

جبکہ ن طاق ہو ۔

جیب یا جیب التمام کی صعودی قوتوں میں سلسلے

۸۰ — جم ن ط، جب ن ط کے پھیلاؤ، جم ط یا جب ط کی صعودی قوتوں میں معلوم کرنے کے لیے ہم اُن جبہ سلسلوں کو جو اوپر حاصل کیے گئے ہیں اُلٹی ترتیب میں لکھ سکتے ہیں ۔ تاہم مطلوبہ سلسلوں کو بالراست معلوم کرنا بہتر ہوگا ۔

اول فرض کرو کہ ن جفت ہے تو

$$\text{جم ن ط} = (۱-\text{جب}^{۲}\text{ط})^{\frac{ن}{۲}} - \frac{ن(ن-۱)}{|\underline{۲}}(۱-\text{جب}^{۲}\text{ط})^{\frac{ن}{۲}-۱}\,\text{جب}^{۲}\text{ط}$$

$$+\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{|\underline{۴}}(۱-\text{جب}^{۲}\text{ط})^{\frac{ن}{۲}-۲}\,\text{جب}^{۴}\text{ط} - \ldots\ldots ،$$

اب مسئلہ ثنائی کے ذریعہ ۱ - جب² ط کی ہر قوت کو پھیلانے سے

$$\text{جم ن ط} = ۱-\left\{\frac{ن}{۲}+\frac{ن(ن-۱)}{۲}\right\}\text{جب}^{۲}\text{ط} + \left\{\frac{\frac{ن}{۲}(\frac{ن}{۲}-۱)}{|\underline{۲}} + \frac{ن(ن-۱)}{۲}(\frac{ن}{۲}-۱)\right.$$

$$\left.+\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{|\underline{۴}}\right\}\text{جب}^{۴}\text{ط} - \ldots\ldots$$

اس پھیلاؤ میں $(-۱)^{س}\,\text{جب}^{۲س}\,\text{ط}$ کا سر ہے

$$\frac{\frac{۱}{۲}ن(\frac{۱}{۲}ن-۱)\ldots(\frac{۱}{۲}ن-س+۱)}{|\underline{س}} + \frac{ن(ن-۱)}{|\underline{۲}}\;\frac{(\frac{۱}{۲}ن-۱)\ldots(\frac{۱}{۲}ن-س+۱)}{|\underline{س-۱}}$$

$$+\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{|\underline{۴}}\;\frac{(\frac{۱}{۲}ن-۲)\ldots(\frac{۱}{۲}ن-س+۱)}{|\underline{س-۲}} + \ldots\ldots$$

جس کو شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{1}{\lfloor\text{س}}\times\frac{\text{ن}(\text{ن}-2)(\text{ن}-4)\cdots(\text{ن}-2\text{س}+2)}{1\times3\times5\times\cdots(2\text{س}-1)}\Big\{\Big(\frac{2\text{س}-1}{2}\Big)\Big(\frac{2\text{س}-1}{2}-1\Big)\cdots\Big(\frac{2\text{س}-1}{2}-\text{س}+1\Big)$$

$$+\text{س}\Big(\frac{2\text{س}-1}{2}\Big)\Big(\frac{2\text{س}-1}{2}-1\Big)\cdots\Big(\frac{2\text{س}-1}{2}-\text{س}+2\Big)\Big(\frac{\text{ن}-1}{2}\Big)$$

$$+\frac{\text{س}(\text{س}-1)}{\lfloor 2}\Big(\frac{2\text{س}-1}{2}\Big)\Big(\frac{2\text{س}-1}{2}-1\Big)\cdots\Big(\frac{2\text{س}-1}{2}-\text{س}+3\Big)\Big(\frac{\text{ن}-1}{2}\Big)\Big(\frac{\text{ن}-1}{2}-1\Big)$$

$$+\cdots\cdots$$ (107)

اب وانڈرمانڈ کا مسئلہ[1] ہے

$$(\text{ف}+\text{ق})_{\text{س}}=\text{ف}_{\text{س}}+\text{س}\,\text{ف}_{\text{س}-1}\text{ق}_1+\frac{\text{س}(\text{س}-1)}{\lfloor 2}\text{ف}_{\text{س}-2}\text{ق}_2+\cdots$$

جس میں $\text{ف}_{\text{س}}$، $\text{ف}(\text{ف}-1)\ldots(\text{ف}-\text{س}+1)$ کو تعبیر کرتا ہے۔ چونکہ یہ مسئلہ ف اور ق کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے، اس لیے فرض کرو کہ $\text{ف}=\frac{2\text{س}-1}{2}$، $\text{ق}=\frac{\text{ن}-1}{2}$، تب خطوط وحدانی کے اندر کے سلسلوں پر یہ مسئلہ استعمال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $(-1)^{\text{س}}$ جب$^{2\text{س}}$ ط کا سر ہے

$$\frac{1}{\lfloor\text{س}}\,\frac{\text{ن}(\text{ن}-2)\cdots(\text{ن}-2\text{س}+2)}{1\times3\times5\times\cdots(2\text{س}-1)}\Big(\tfrac{1}{2}\text{ن}+\text{س}-1\Big)\Big(\tfrac{1}{2}\text{ن}+\text{س}-2\Big)\cdots\Big(\tfrac{1}{2}\text{ن}\Big)$$

یا

$$\frac{\text{ن}^2(\text{ن}^2-2^2)(\text{ن}^2-4^2)\cdots(\text{ن}^2-\overline{2\text{س}-2}^{\,2})}{\lfloor 2\text{س}}$$

[1] دیکھو اسمتھ کا الجبرا صفحہ ۲۸۸، یا کرسٹل کا الجبرا جلد دوم صفحہ ۹۔

پس جب، ن جفت ہو تو

$$جم\,ن\,ط = ۱ - \frac{ن^۲}{\underline{|۲}} جب^۲ ط + \frac{ن^۲(ن^۲-۲^۲)}{\underline{|۴}} جب^۴ ط \; . \; . \; . \; .$$

$$+ (-۱)^{س} \frac{ن^۲(ن^۲-۲^۲)\ldots(ن^۲-\overline{۲س-۲}^{\,۲})}{\underline{|۲س}} جب^{۲س} ط + \ldots \quad (۷)$$

یہ سلسلہ، سلسلہ (۳) الٹی ترتیب میں لکھا ہوا ہے۔

۸۱ — نیز

$$جب\,ن\,ط = جم\,ط \left\{ ن\,(۱-جب^۲ ط)^{\frac{۱}{۲}ن-۱} جب\,ط - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{\underline{|۳}} (۱-جب^۲ ط)^{\frac{۱}{۲}ن-۲} جب^۳ ط + \ldots \right\}$$

فرض کرو کہ ن جفت ہے، سلسلہ کی ہر رقم کو جب² ط کی قوتوں میں پھیلاؤ تو ہمیں

$(-۱)^{س+۱}$ جم ط جب$^{۲س-۱}$ ط کا سر ملتا ہے

$$\frac{۱}{\underline{|س-۱}} \left\{ \frac{ن(ن-۲)\ldots(ن-۲س+۲)}{۱\times۳\times۵\ldots(۲س-۱)} \left(\frac{۲س-۱}{۲}\right)_{س-۱} + (س-۱)\left(\frac{۲س-۱}{۲}\right)_{س-۲}\left(\frac{ن-۱}{۲}\right)_{۱} \right.$$

$$\left. + \frac{(س-۱)(س-۲)}{\underline{|۲}} \left(\frac{۲س-۱}{۲}\right)_{س-۳} \left(\frac{ن-۱}{۲}\right)_{۲} + \ldots\ldots \right\}$$

جو

$$= \frac{۱}{\underline{|س-۱}} \times \frac{ن(ن-۲)\ldots(ن-۲س+۲)}{۱\times۳\times۵\ldots(۲س-۱)} (\tfrac{۱}{۲}ن+س-۱)\ldots(\tfrac{۱}{۲}ن+۱)$$

$$= \frac{ن(ن^۲-۲^۲)(ن^۲-۴^۲)\ldots(ن^۲-\overline{۲س-۲}^{\,۲})}{\underline{|۲س-۱}}$$

108) پس ن جفت ہونے کی صورت میں

$$جب\,ن\,ط / جم\,ط = \frac{ن}{۱} جب\,ط - \frac{ن(ن^۲-۲^۲)}{\underline{|۳}} جب^۳ ط + \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$+ (-۱)^{س-۱} \frac{ن(ن^۲-۲^۲)\ldots(ن^۲-\overline{۲س-۲}^{\,۲})}{\underline{|۲س-۱}} جب^{۲س-۱} ط + \ldots$$

۸۲ — جب، ن طاق ہو تو

$$\text{جم ن ط} = \text{جم ط}\left\{(1-\text{جب}^2\text{ط})^{\frac{1}{2}(\text{ن}-1)} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\underline{|2}}(1-\text{جب}^2\text{ط})^{\frac{1}{2}(\text{ن}-3)}\,\text{جب}^2\text{ط} + \cdots\cdots\right\}،$$

اور

$$\text{جب ن ط} = \text{ن}\,(1-\text{جب}^2\text{ط})^{\frac{1}{2}(\text{ن}-1)}\,\text{جب ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{\underline{|3}}(1-\text{جب}^2\text{ط})^{\frac{1}{2}(\text{ن}-3)}\,\text{جب}^3\text{ط} + \cdots$$

اب پچھلی دفعہ کی طرح جب ط کی قوتوں میں سلسلوں کو پھیلانے سے اسی طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم ن ط} \backslash \text{جم ط} = 1 - \frac{\text{ن}^2-1}{\underline{|2}}\,\text{جب}^2\text{ط} + \frac{(\text{ن}^2-1)(\text{ن}^2-3^2)}{\underline{|4}}\,\text{جب}^4\text{ط} - \cdots$$

$$+ (-1)^{\text{س}}\frac{(\text{ن}^2-1)(\text{ن}^2-3^2)\cdots(\text{ن}^2-\overline{2\text{س}-1}^{\,2})}{\underline{|2\text{س}}}\,\text{جب}^{2\text{س}}\text{ط}$$

$$+ \cdots\cdots \qquad (9)$$

اور

$$\text{جب ن ط} = \frac{\text{ن}}{1}\,\text{جب ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}^2-1)}{\underline{|3}}\,\text{جب}^3\text{ط} + \frac{\text{ن}(\text{ن}^2-1)(\text{ن}^2-3^2)}{\underline{|5}}\,\text{جب}^5\text{ط}$$

$$- \cdots + (-1)^{\text{س}-1}\frac{\text{ن}(\text{ن}^2-1)\cdots(\text{ن}^2-\overline{2\text{س}-3}^{\,2})}{\underline{|2\text{س}-1}}\,\text{جب}^{2\text{س}-1}\text{ط}$$

$$+ \cdots \qquad \cdots\cdots (10)$$

۸۳ — اگر ضابطوں (۷)، (۸)، (۹)، (۱۰) میں ط کو $\frac{1}{2}\pi$ - ط سے بدل دیا جائے تو حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$(-1)^{\frac{1}{2}\text{ن}}\,\text{جم ن ط} = 1 - \frac{\text{ن}^2}{\underline{|2}}\,\text{جم}^2\text{ط} + \frac{\text{ن}^2(\text{ن}^2-2^2)}{\underline{|4}}\,\text{جم}^4\text{ط}$$

$$- \frac{\text{ن}^2(\text{ن}^2-2^2)(\text{ن}^2-4^2)}{\underline{|6}}\,\text{جم}^6\text{ط} + \cdots\cdots \qquad (11)$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\text{ن}+1)}\ \text{جب ن ط}\,\backslash\,\text{جب ط} = \frac{\text{ن}}{1}\,\text{جم ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}^2-2^2)}{\lfloor 3}\,\text{جم}^3\,\text{ط}$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}^2-2^2)(\text{ن}^2-4^2)}{\lfloor 5}\,\text{جم}^5\,\text{ط} - \ldots \quad (12)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\text{ن}-1)}\ \text{جب ن ط}\,\backslash\,\text{جب ط} = 1 - \frac{\text{ن}^2-1^2}{\lfloor 2}\,\text{جم}^2\,\text{ط}$$

$$+ \frac{(\text{ن}^2-1^2)(\text{ن}^2-3^2)}{\lfloor 4}\,\text{جم}^4\,\text{ط} - \ldots \quad (13)$$

اور

(109)

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\text{ن}-1)}\ \text{جم ن ط} = \frac{\text{ن}}{1}\,\text{جم ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}^2-1^2)}{\lfloor 3}\,\text{جم}^3\,\text{ط}$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}^2-1^2)(\text{ن}^2-3^2)}{\lfloor 5}\,\text{جم}^5\,\text{ط} - \ldots \quad (14)$$

جبکہ ن طاق ہو۔ یہ سب ضابطے وہی ہیں جو دفعات ۷۸ اور ۷۹ میں حاصل کئے گئے تھے۔

تحت ضعفی زاویوں کے دائری تفاعل

۸۴ — اگر ہم ضابطوں (۱) تا (۶) میں یا ان کی مماثل شکلوں (۷) تا (۱۴) میں ط کی بجائے $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ لکھیں تو ایسی مساواتیں ملتی ہیں جن سے جم $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ یا جب $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ دریافت ہو سکتا ہے جبکہ جم ط اور جب ط دیے گئے ہوں۔ ہم مختلف صورتوں پر غور کرینگے۔

(۱) فرض کرو کہ جم ط دیا گیا ہے، تب اُسی مساوات سے جو (۱) سے حاصل کی گئی ہے جم $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کی ن قیمتیں ملینگی۔ پس جم ط دیا گیا ہے تو اُن تمام زاویوں کی جیوب التمام معلوم ہونے کی اُمید رکھنی چاہیے جو $\frac{2\text{ک}\pi \pm \text{ط}}{\text{ن}}$

میں شامل ہیں، کیونکہ ۲ک π ± ط سے وہ تمام زاویے تعبیر ہوتے ہیں جن کی جیب التمام وہی ہے جو ط کی ہے، اس میں ک کوئی صحیح عدد ہے۔ اب ک کی خواہ کوئی قیمت ہو ہم لکھ سکتے ہیں ± ک = س + کَ ن جس میں س کی قیمت ۰، ۱، ۲، ۳، ...، ن - ۱ میں سے ہمیشہ کوئی ایک ہے اور کَ مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔ تب

$$\text{جم}\,\frac{\text{۲ک}\,\pi \pm \text{ط}}{\text{ن}} = \text{جم}\left(\frac{\text{ط} + \text{۲س}\,\pi}{\text{ن}} \pm \text{۲}\,\pi\,\text{کَ}\right) = \text{جم}\,\frac{\text{ط} + \text{۲س}\,\pi}{\text{ن}}$$

اس طرح ہمیں حسب ذیل ن قیمتوں کے حاصل ہونے کی توقع رکھنی چاہیے:۔

$$\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\text{،}\ \text{جم}\,\frac{\text{ط} + \text{۲}\pi}{\text{ن}}\text{،}\ \text{جم}\,\frac{\text{ط} + \text{۴}\pi}{\text{ن}}\text{،}\ \ldots\text{،}\ \text{جم}\,\frac{\text{ط} + \text{۲(ن} - \text{۱)}\pi}{\text{ن}}$$

اور یہ قیمتیں اُس مساوات کی اصلیں ہونگی جو (۱) سے حاصل ہوتی ہے۔ یہ سب اصلیں بالعموم مختلف ہوتی ہیں، کیونکہ ان میں سے کسی دو زاویوں کا مجموعہ یا فرق ۲ π کا ضعف نہیں ہے۔

(۳) فرض کرو، جم ط دیا گیا ہے، تب اُن مساواتوں سے جو (۳) یا (۶) سے حاصل ہوتی ہیں جب $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کی قیمتیں ملینگی۔ (۶) کو استعمال کرنے سے پیشتر ہمیں اس کی ہر جانب کا مربع لینا چاہیے اور جم$^{۲}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کی بجائے ۱-جب$^{۲}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ لکھنا چاہیے، اس طرح (۶) سے جب $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کے لیے ۲ ن درجہ کی ایک مساوات ملتی ہے جبکہ ن طاق ہو، اور مساوات (۳) سے ن درجہ کی ایک (110)
مساوات ملتی ہے جبکہ ن جفت ہو۔ پس ہمیں جب $\frac{\text{۲ک}\,\pi \pm \text{ط}}{\text{ن}}$ کی تمام قیمتیں حاصل ہونے کی توقع رکھنی چاہیے جبکہ جم ط دیا گیا ہو۔ پچھلی صورت کی طرح ہم یہ دکھا سکتے ہیں کہ یہ تمام قیمتیں جملہ جب $\frac{\text{۲س}\,\pi \pm \text{ط}}{\text{ن}}$ میں شامل ہیں جہاں س کی قیمتیں ۰، ۱، ۲، ...، ن - ۱ ہیں۔ جب، ن طاق ہو تو یہ سب قیمتیں مختلف ہوتی ہیں اور اس لیے ۲ ن قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور یہ اُس مساوات کی ۲ ن اصلیں ہیں جو (۶) سے حاصل ہوئی ہے۔ جب، ن جفت ہو تو جب $\frac{\text{(ن} - \text{۲س)}\,\pi - \text{ط}}{\text{ن}}$ = جب $\frac{\text{۲س}\,\pi + \text{ط}}{\text{ن}}$

اس لیے اُس صورت میں صرف ن قیمتیں ہیں اور وہ (۳) سے حاصل کردہ مساوات سے ملتی ہیں۔

(۳) فرض کرو جب ط دیا گیا ہے، تب جم $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ معلوم کرنے کے لیے ہم وہ مساوات استعمال کرتے ہیں جو (۲) سے حاصل ہوتی ہے؛ اس مساوات سے جم $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کی ۲ن قیمتیں حاصل ہوتی ہیں، کیونکہ اس مساوات کو استعمال کرنے سے پیشتر ہمیں طرفین کا مربع لینا اور جب^{۲} $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کی بجائے ۱ـجم^{۲} $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ رکھنا پڑتا ہے۔ حسب سابق ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ جملہ جم $\frac{\text{س}\,\pi + (-1)^{\text{س}}\,\text{ط}}{\text{ن}}$ کی ۲ن قیمتیں ہیں؛ اس طرح ۲ن درجہ کی ایک مساوات سے جم $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$، جب ط کی رقوم میں معلوم ہوتا ہے۔

(۴) فرض کرو کہ جب ط دیا گیا ہے، تب جب $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ معلوم کرنے کے لیے ہم وہ مساوات استعمال کرتے ہیں جو (۴) یا (۵) سے حاصل ہوتی ہے بموجب اس کے کہ ن جفت یا طاق ہے۔ اگر ن جفت ہے تو (۴) سے حاصل کردہ مساوات سے جب $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کی ۲ن قیمتیں ملتی ہیں، یہ قیمتیں جب $\frac{\text{س}\,\pi + (-1)^{\text{س}}\,\text{ط}}{\text{ن}}$ کی ۲ن قیمتیں ہونگی۔ اگر ن طاق ہے تو (۵) سے حاصل کردہ مساوات سے جب $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کی ن قیمتیں ملینگی جو جب $\frac{\text{س}\,\pi + (-1)^{\text{س}}\,\text{ط}}{\text{ن}}$ کی ن مختلف قیمتیں ہونگی۔

مساواتوں کی اصلوں کے متشاکل تفاعل

۸۵ — ضابطہ (۱) کو جم ط میں ن ویں درجہ کی ایک مساوات خیال کیا جا سکتا ہے جبکہ جم ن ط دیا گیا ہو۔ اب چونکہ ن زاویوں ط، ط + $\frac{۲\pi}{\text{ن}}$، ط + $\frac{۴\pi}{\text{ن}}$، ..... (111)
ط + $\frac{۲(\text{ن}-1)\pi}{\text{ن}}$ میں سے ہر زاویہ ایسا ہے کہ اس کے ن گُنے کی جیب التمام جم ن ط کے مساوی ہے اور چونکہ جم ط، جم $\left(\text{ط} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)$، جم $\left(\text{ط} + \frac{۴\pi}{\text{ن}}\right)$، ..... جم $\left\{\text{ط} + \frac{۲(\text{ن}-1)\pi}{\text{ن}}\right\}$ سب کے سب مختلف ہیں، وہ جم ط کی مساوات

کی اصلیں ہیں؛ اب ہم ن جیوب التمام جم $\left(\text{ط} + \frac{2\text{ر}}{\text{ن}}\pi\right)$ جو ر = ۰، ۱، ۲، ...، ن - ۱ رکھنے سے حاصل ہوتی ہیں، کے تشاکل تفاعلات محسوب کرنے کیلئے وہ معمولی مسئلے استعمال کرسکتے ہیں جو مساواتوں کی اصلوں کے تشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال ہوئے تھے۔ اگر ضابطوں (۱۱) اور (۱۴) کے استعمال کرنے میں سہولت ہو تو ہم انہیں استعمال کرسکتے ہیں کیونکہ وہ (۱) کے مماثل ہیں۔

نیز مساوات (۲)، اُن (ن - ۱) زاویوں کی جیوب التمام کے تشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال ہوسکتی ہے جن کے لیے جب ن ط \ جب ط کی قیمت دی ہوئی ہو۔

اسی طرح مساوات (۳)، ۲ م جیوب

$$\text{جب ط، جب}\left(\text{ط} + \frac{\pi}{\text{م}}\right)\text{، جب}\left(\text{ط} + \frac{2\pi}{\text{م}}\right)\text{، ...، جب}\left(\text{ط} + \frac{2\text{م}\pi - \pi}{\text{م}}\right)$$

کے تشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال ہوسکتی ہے جبکہ ن = ۲ م۔

اسی طرح مسئلہ (۵)، ۲ م + ۱ جیوب

$$\text{جب ط، جب}\left(\text{ط} + \frac{2\pi}{2\text{م}+1}\right)\text{، جب}\left(\text{ط} + \frac{4\pi}{2\text{م}+1}\right)\text{، ... جب}\left(\text{ط} + \frac{4\text{م}\pi}{2\text{م}+1}\right)$$

کے تشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال ہوسکتا ہے جبکہ ن = ۲ م + ۱۔

مساوات

$$\text{مس ن ط}\left\{1 - \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\lfloor 2}\,\text{مس}^2\text{ط} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)}{\lfloor 4}\,\text{مس}^4\text{ط} \ldots\right\}$$

$$= \text{ن مس ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{\lfloor 3}\,\text{مس}^3\text{ط} + \ldots$$

کو مس ط کی مساوات سمجھا جاسکتا ہے جس کی اصلیں ہیں

$$\text{مس ط، مس}\left(\text{ط} + \frac{\pi}{\text{ن}}\right)\text{، مس}\left(\text{ط} + \frac{2\pi}{\text{ن}}\right)\text{، ...، مس}\left(\text{ط} + \frac{(\text{ن}-1)\pi}{\text{ن}}\right)$$

اور اس لیے اُس کو اِن جملوں کے تشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال کیا جاسکتا ہے۔

(112)

امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ زاویوں

$$\text{ط}،\ \text{ط} + \frac{2\pi}{\text{ن}}،\ \ldots،\ \text{ط} + \frac{2(\text{ن}-1)\pi}{\text{ن}}$$

میں سے دو دو کے قاطع التماموں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ $-\frac{1}{4}\text{ن}^2\ \text{قم}^2\frac{1}{2}\text{ن ط}$ ہے جہاں ن ایک جفت عدد ہے۔

مساوات (۷) استعمال کرنے سے یہ معلوم ہوگا کہ اگر مندرجہ بالا زاویوں میں سے ن-۲، ن-۲ زاویوں کی جیوب کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کو اِن سب زاویوں کی جیوب کے حاصل ضرب سے تقسیم کیا جائے تو حاصل قسمت مطلوبہ مجموعہ ہے؛ یہ حاصل قسمت جب^2 ط کے سر کے مساوی ہے اگر اس کو اُس رقم سے تقسیم کیا جائے جس مین جب ط شامل نہیں ہوتا یعنے

$$\text{مطلوبہ مجموعہ} = -\frac{\text{ن}^2}{2(1-\text{جم ن ط})}$$

$$= -\frac{\text{ن}^2}{4}\ \text{قم}^2\ \frac{1}{2}\text{ن ط}$$

(۲) ثابت کرو کہ

$$\text{جم}^4\frac{1}{9}\pi + \text{جم}^4\frac{2}{9}\pi + \text{جم}^4\frac{3}{9}\pi\ \text{جم}^4\frac{4}{9}\pi = \frac{19}{16}$$

اور
$$\text{قط}^4\frac{1}{9}\pi + \text{قط}^4\frac{2}{9}\pi + \text{قط}^4\frac{3}{9}\pi + \text{قط}^4\frac{4}{9}\pi = 1120$$

اگر جب ۹ ط \ جب ط کو جم ط کی رقوم میں بیان کیا جائے اور پھر اس کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو اِس آٹھویں درجہ کی مساوات کو حل کرنے سے جم ط کی جو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں وہ ہونگی

$$\text{جم}\frac{1}{9}\pi،\ \text{جم}\frac{2}{9}\pi،\ \ldots،\ \text{جم}\frac{8}{9}\pi$$

لیکن، ہم دیکھتے ہیں کہ

جم $\frac{۵}{۹}$ π = − جم $\frac{۱}{۹}$ π ، جم $\frac{۶}{۹}$ π = − جم $\frac{۲}{۹}$ π ، ......

اس لیے مساوات متذکرہ بالا کی اصلیں ہیں

± جم $\frac{۱}{۹}$ π ، ± جم $\frac{۲}{۹}$ π ، ± جم $\frac{۳}{۹}$ π ، ± جم $\frac{۴}{۹}$ π

اب ہم سلسلہ (۲) استعمال کر سکتے ہیں یا عمل کو اس طرح جاری کر سکتے ہیں :—

اگر جب ۹ ط = ۰ تو

جب ۵ ط . جم ۴ ط + جم ۵ ط جب ۴ ط = ۰

یا

(جب ۳ ط . جم ۲ ط + جم ۳ ط جب ۲ ط) (۲ جم^{۲} ۲ ط − ۱)

+ (جم ۳ ط جم ۲ ط − جب ۳ ط جب ۲ ط) ۲ جب ۲ ط جم ۲ ط = ۰

جب ۳ ط، جم ۲ ط، وغیرہ کی بجائے ان کی قیمتیں درج کرو اور جزو ضربی جب ط کو خارج کرو اور فرض کرو کہ لا = جم^{۲} ط تو لا میں حسب ذیل چار درجی مساوات حاصل ہوگی

{(۴ لا^{۲} − ۱) (۲ لا − ۱) + ۲ (۴ لا^{۲} − ۳ لا)} [۲ (۲ لا − ۱)^{۲} − ۱} + [۴ (۲ لا − ۱) (۴ لا^{۲} − ۳ لا)

− ۸ (۴ لا − ۱) (۱ − لا) لا {(۲ لا − ۱) = ۰

یا (۱۶ لا^{۲} − ۱۲ لا + ۱) (۸ لا^{۲} − ۸ لا + ۱) + (۶۴ لا^{۳} − ۸۰ لا^{۲} + ۲۰ لا) (۲ لا − ۱) = ۰

یا لا کی قوتوں کے بموجب ترتیب دینے سے

۲۵۶ لا^{۴} − ۴۴۸ لا^{۳} + ۲۴۰ لا^{۲} − ۴۰ لا + ۱ = ۰

اس مساوات کی اصلوں کا حاصل جمع $\frac{۴۴۸}{۲۵۶}$ ہے اور دو دو اصلوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ $\frac{۲۴۰}{۲۵۶}$ ہے، اس لیے اصلوں کے مربعوں کا مجموعہ = $\frac{۴۴۸^{۲} - ۲ \times ۲۴۰ \times ۲۵۶}{(۲۵۶)^{۲}}$ = $\frac{۱۹}{۱۶}$ ، نیز اصلوں کے متکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ = ۴۰^{۲} − ۲ × ۲۴۰ = ۱۱۲۰

(۳) ثابت کرو کہ

جب ع + جب ۲ ع + جب ۴ ع = $\frac{۱}{۲}$ $\sqrt{۷}$

جہاں ع = ۲/۷ π ۔

ہم دیکھتے ہیں کہ (جب ع + جب ۲ع + جب ۴ع)^۲ = جب^۲ ع + جب^۲ ۲ع + جب^۲ ۴ع

(113) اگر جب ۷ط \ جب ط کو جب ط کی رقوم میں پھیلایا جائے اور پھر اس کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو جب ط کی مساوات کی اصلیں ہونگی

± جب ع، ± جب ۲ع، ± جب ۴ع

رکھو لا = جب^۲ ط تو لا میں مساوات حاصل ہوتی ہے

۶۴ لا^۳ − ۱۱۲ لا^۲ + ۵۶ لا − ۷ = ۰

اس لیے جب^۲ ع + جب^۲ ۲ع + جب^۲ ۴ع = ۱۱۲/۶۴ = ۷/۴

اس لیے جب ع + جب ۲ع + جب ۴ع = ۱/۲ √۷

(۴) جب π/۱۷ کی قیمت معلوم کرو۔

لکھو ع = ۲π/۱۷ تو اُس ضابطہ سے جو زاویوں کی جیوب التمام کے مجموعہ کے لیے ہے جبکہ زاوئے سلسلہ حسابیہ میں ہوں ہم معلوم کرتے ہیں۔

(جم ع + جم ۹ع + جم ۱۳ع + جم ۱۵ع) + (جم ۳ع + جم ۵ع + جم ۷ع + جم ۱۱ع) = − ۱/۲

نیز (جم ع + جم ۹ع + جم ۱۳ع + جم ۱۵ع) اور (جم ۳ع + جم ۵ع + جم ۷ع + جم ۱۱ع) کو باہم ضرب دینے اور ہر دو جیوب التمام کے حاصل ضرب کی بجائے اِن دو جیوب التمام کے مجموعہ کا نصف رکھنے سے یہ معلوم ہوگا کہ

(جم ع + جم ۹ع + جم ۱۳ع + جم ۱۵ع) (جم ۳ع + جم ۵ع + جم ۷ع + جم ۱۱ع) = −۱

پس خطوط وحدانی کے اندر کی دو مقداریں دو درجی مساوات ی^۲ + ۱/۲ ی − ۱ = ۰ کی اصلیں ہیں؛ لیکن اس مساوات کی اصلیں ۱/۴ (−۱ ± √۱۷) ہیں۔ اب یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ

جم ع + جم ۹ع + جم ۱۳ع + جم ۱۵ع مثبت ہے اور جم ۳ع + جم ۵ع + جم ۷ع + جم ۱۱ع منفی ہے۔ اس لیے

جم ع + جم ۹ع + جم ۱۳ع + جم ۱۵ع = ۱/۴ (√۱۷ − ۱)،

جم ۳ع + جم ۵ع + جم ۷ع + جم ۱۱ع = − ۱/۴ (√۱۷ + ۱)

اب ہم یہ دکھا سکتے ہیں کہ (جم ع + جم ۱۳ع) (جم ۹ع + جم ۱۵ع) = − ۱/۴

اس لیے جم عہ + جم ١٣ عہ، جم ٩ عہ + جم ١٥ عہ اِس دو درجی مساوات

$$\text{لا}^2 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{17}-1\right)\text{لا} - \frac{1}{4} = 0$$

کی اصلیں ہیں۔ پس

$$\text{جم عہ} + \text{جم } 13\,\text{عہ} = \frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right);$$

اسی طرح حاصل ہوگا

$$\text{جم } 3\,\text{عہ} + \text{جم } 5\,\text{عہ} = \frac{1}{8}\left(-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)$$

اب $\text{جم عہ جم } 13\,\text{عہ} = \frac{1}{2}\left(\text{جم } 12\,\text{عہ} + \text{جم } 14\,\text{عہ}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{جم } 3\,\text{عہ} + \text{جم } 5\,\text{عہ}\right)$؛ اور چونکہ ہم نے جم عہ، جم ١٣ عہ کے مجموعہ اور حاصل ضرب کو معلوم کر لیا ہے اس لیے ہم ان میں سے ہر ایک کو معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ دیکھتے ہوئے کہ جم عہ > جم ١٣ عہ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم عہ} = \frac{1}{16}\left\{\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}\right\}$$

تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } \frac{\pi}{17} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\text{جم عہ}\right)}$$

$$= \frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-4\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}$$

(٥) ثابت کرو[1] کہ اگر ف (لا، ما)، ایک متجانس تفاعل ہو لا، ما کا جس کے ابعاد ن−١ ہیں تو

$$\frac{\text{ف}\,(\text{جب لا، جم ما})}{\text{جب}\,(\text{لا}-\text{عہ}_1)\,\text{جب}\,(\text{لا}-\text{عہ}_2)\cdots\text{جب}\,(\text{لا}-\text{عہ}_\text{ن})}$$

$$= \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \frac{\text{ف}\,(\text{جب عہ}_\text{ر}\text{، جم عہ}_\text{ر})}{\text{جب}\,(\text{لا}-\text{عہ}_\text{ر})\,\text{جب}\,(\text{عہ}_\text{ر}-\text{عہ}_1)\,\text{جب}\,(\text{عہ}_\text{ر}-\text{عہ}_2)\cdots\text{جب}\,(\text{عہ}_\text{ر}-\text{عہ}_\text{ن})}$$

[1] ہرمٹ نے اس مسئلہ کو ایک مضمون "Sur 1' Integration des Fonctions circnlaires" میں بیان کیا ہے جو Proc. Land. math. Soc. بابتہ ١٨٧٢ء میں شائع ہوا تھا۔

(114)

اس مساوات کی دائیں طرف کا جملہ لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{ف}(\text{م}،1)}{(\text{م}-\text{ل}_1)(\text{م}-\text{ل}_2)\cdots(\text{م}-\text{ل}_\text{ن})}\times\frac{1}{\text{جم لا جم ع}_1\,\text{جم ع}_2\cdots\text{جم ع}_\text{ن}}$$

، جہاں $\text{م} = \text{مس لا}$، $\text{ل}_\text{ر} = \text{مس ع}_\text{ر}$

اب چونکہ $\text{ف}(\text{م}،1)$، ن − ۱ درجہ کا ہے جو ن سے کم ہے اس لیے جزوی کسور میں تحلیل کرنے کے معمولی طریقہ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ف}(\text{م}،1)}{(\text{م}-\text{ل}_1)(\text{م}-\text{ل}_2)\cdots(\text{م}-\text{ل}_\text{ن})} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \frac{\text{ف}(\text{ل}_\text{ر}،1)}{(\text{م}-\text{ل}_\text{ر})(\text{ل}_\text{ر}-\text{ل}_1)(\text{ل}_\text{ر}-\text{ل}_2)\cdots(\text{ل}_\text{ر}-\text{ل}_\text{ن})}$$

$$= \sum \frac{\text{ف}(\text{جب ع}_\text{ر}،\text{جم ع}_\text{ر})\,\text{جم لا جم ع}_1\,\text{جم ع}_2\cdots\text{جم ع}_\text{ن}}{\text{جب}(\text{لا}-\text{ع}_\text{ر})\,\text{جب}(\text{ع}_\text{ر}-\text{ع}_1)\cdots\text{جب}(\text{ع}_\text{ر}-\text{ع}_\text{ن})}$$

اس طرح مطلوبہ نتیجہ اس سے حاصل ہوجاتا ہے۔

اجزائے ضربی

۸۶ —— چونکہ جم ن ط کو جم ط میں ن ویں درجہ کے ایک منطق صحیح تفاعل کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے اس لیے ہم جم ن ط کو ن اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے طور پر جو جم ط میں خطی ہوں بیان کر سکتے ہیں۔ جم ط کی وہ قیمتیں جن کے لیے جم ن ط معدوم ہوتا ہے یہ ہیں:

$$\text{جم}\frac{\pi}{2\text{ن}}،\ \text{جم}\frac{3\pi}{2\text{ن}}،\ \ldots،\ \text{جم}\frac{(2\text{ن}-1)\pi}{2\text{ن}}؛$$

یہ جیوب التمام سب کی سب مختلف ہیں؛ اس لیے

$$\text{جم ن ط} = \text{ا}\left(\text{جم ط}-\text{جم}\frac{\pi}{2\text{ن}}\right)\left(\text{جم ط}-\text{جم}\frac{3\pi}{2\text{ن}}\right)\cdots\left(\text{جم ط}-\text{جم}\frac{(2\text{ن}-1)\pi}{2\text{ن}}\right)$$

جس میں ا ایک عددی جزوِ ضربی ہے۔ چونکہ جم ن ط کے لیے جو جملہ جم ط میں ہے

اس میں جم ط کی اعلیٰ ترین قوت $۲^{ن-۱}$ جم^{ن} ط ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ $ا = ۲^{ن-۱}$؛ اس لیے

$$\text{جم ن ط} = ۲^{ن-۱}\left(\text{جم ط} - \text{جم}\frac{\pi}{۲ن}\right)\left(\text{جم ط} - \text{جم}\frac{۳\pi}{۲ن}\right)\cdots\left(\text{جم ط} - \text{جم}\frac{(۲ن-۱)\pi}{۲ن}\right)$$

اب $\text{جم}\frac{ر\pi}{۲ن} = -\text{جم}\frac{(۲ن-ر)\pi}{۲ن}$، اس لیے یہ جملہ لکھا جا سکتا ہے

$$\text{جم ن ط} = ۲^{ن-۱}\,\text{جم ط}\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{\pi}{۲ن}\right)\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{۳\pi}{۲ن}\right)\cdots\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{(ن-۲)\pi}{۲ن}\right)$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

(115) $$\text{جم ن ط} = ۲^{ن-۱}\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{\pi}{۲ن}\right)\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{۳\pi}{۲ن}\right)\cdots\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{(ن-۱)\pi}{۲ن}\right)$$

جبکہ ن جفت ہو۔ نیز یہ جملے لکھے جا سکتے ہیں

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = ۲^{ن-۱}\left(\text{جب}^۲\frac{\pi}{۲ن} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\left(\text{جب}^۲\frac{۳\pi}{۲ن} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\cdots\left(\text{جب}^۲\frac{(ن-۲)\pi}{۲ن} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\text{جم ن ط} = ۲^{ن-۱}\left(\text{جب}^۲\frac{\pi}{۲ن} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\left(\text{جب}^۲\frac{۳\pi}{۲ن} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\cdots\left(\text{جب}^۲\frac{(ن-۱)\pi}{۲ن} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)$$

جبکہ ن جفت ہو۔

ان جملوں میں سے ہر ایک میں ط = ۰ رکھنے سے ہمیں حسب ذیل مسئلے حاصل ہوتے ہیں:—

$$۲^{\frac{۱}{۲}(ن-۱)}\,\text{جب}\frac{\pi}{۲ن}\,\text{جب}\frac{۳\pi}{۲ن}\cdots\text{جب}\frac{(ن-۲)\pi}{۲ن} = ۱،$$

جبکہ ن طاق ہو، اور ....(۱۵)

$$۲^{\frac{۱}{۲}(ن-۱)}\,\text{جب}\frac{\pi}{۲ن}\,\text{جب}\frac{۳\pi}{۲ن}\cdots\text{جب}\frac{(ن-۱)\pi}{۲ن} = ۱$$

جبکہ ن جفت ہو۔

جذر المربع نکالنے میں مثبت علامت لیگئی ہے کیونکہ زاویے سب کے سب حادہ ہیں۔
جم ن ط ÷ جم ط یا جم ن ط کے لیے جو جملے اوپر حاصل ہوئے ہیں اُن کو اگر ہم (۱۵) میں بیان کردہ حاصل ضربوں میں سے تناظر حاصل ضرب کا مربع لیکر اس سے تقسیم کریں تو ہمیں یہ جملے حاصل ہوتے ہیں:

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = \left(1-\frac{\text{جب}^2\,\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{\pi}{2\text{ن}}}\right)\left(1-\frac{\text{جب}^2\,\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{3\pi}{2\text{ن}}}\right)\cdots\left(1-\frac{\text{جب}^2\,\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{(\text{ن}-2)\pi}{2\text{ن}}}\right)\ldots(16)$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\text{جم ن ط} = \left(1-\frac{\text{جب}^2\,\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{\pi}{2\text{ن}}}\right)\left(1-\frac{\text{جب}^2\,\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{3\pi}{2\text{ن}}}\right)\cdots\left(1-\frac{\text{جب}^2\,\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{(\text{ن}-1)\pi}{2\text{ن}}}\right)\ldots\ldots(17)$$

جبکہ ن جفت ہو۔

ہم اِن مسئلوں (۱۶) اور (۱۷) کو لکھ سکتے ہیں اس طرح :— (116)

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-1)}\left(1-\frac{\text{جب}^2\,\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{(2\text{ر}-1)\pi}{2\text{ن}}}\right)\ldots\ldots(16)$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\text{جم ن ط} = \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}\text{ن}}\left(1-\frac{\text{جب}^2\,\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{(2\text{ر}-1)\pi}{2\text{ن}}}\right)\ldots\ldots(17)$$

جبکہ ن جفت ہو۔

۸۷ —— دفعہ ماسبق کی طرح چونکہ جب ن ط / جب ط، جم ط میں ن - ۱ درجہ کا ایک جبری تفاعل ہے اس لیے اس کے لیے ایک

متناظر جملہ اجزائے ضربی میں معلوم کیا جا سکتا ہے جو (اجزائے ضربی) جم ط میں خطی ہوں ؛ اس صورت میں

$$\text{جم}\,\frac{\pi}{\text{ن}}\text{،}\ \ \text{جم}\,\frac{۲\pi}{\text{ن}}\text{،}\ \ldots\text{،}\ \text{جم}\,\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}$$

جم ط کی وہ قیمتیں ہیں جن کے لیے جب ن ط\جب ط صفر کے مساوی ہے۔ یہ قیمتیں لکھی جا سکتی ہیں :

$$\pm\,\text{جم}\,\frac{\pi}{\text{ن}}\text{،}\ \ \pm\,\text{جم}\,\frac{۲\pi}{\text{ن}}\text{،}\ \ldots$$

پس حسب سابق

$$\text{جب ن ط}\backslash\text{جب ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جم ط}\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{\pi}{\text{ن}}\right)\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)\ldots\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}}\right)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$\text{جب ن ط}\backslash\text{جب ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{\pi}{\text{ن}}\right)\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)\ldots\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{۲\text{ن}}\right)$$

جبکہ ن طاق ہو۔

اِن جملوں کو ہم حسب ذیل شکلوں میں لکھ سکتے ہیں :۔

$$\text{جب ن ط}\backslash\text{جب ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جم ط}\left(\text{جب}^۲\frac{\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\left(\text{جب}^۲\frac{۲\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\ldots\left(\text{جب}^۲\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$\text{جب ن ط}\backslash\text{جب ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\left(\text{جب}^۲\frac{\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\left(\text{جب}^۲\frac{۲\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\ldots\left(\text{جب}^۲\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{۲\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)$$

جبکہ ن طاق ہو۔

(117) آیندہ باب میں ہم یہ دکھائینگے کہ $\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}}$ کی انتہا ن ہے جبکہ ط لا انتہا چھوٹا ہو ؛ پس

$$\sqrt{\text{ن}} = ۲^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\pi}{\text{ن}}\,\text{جب}\,\frac{۲\pi}{\text{ن}}\ldots\text{،}\ \ldots\ldots\ (۱۸)$$

بائیں جانب آخری جزو ضربی جب $\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}}$ یا جب $\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{۲\text{ن}}$ ہے بموجب اس کے کہ ن جفت ہے یا طاق۔ پس

$$\text{جب ن ط} \backslash \text{ن جب ط} = \text{جم ط} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-2)} \left(1 - \frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{جب}^2 \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right) \ldots\ldots (19)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$\text{جب ن ط} \backslash \text{ن جب ط} = \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-1)} \left(1 - \frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{جب}^2 \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right) \ldots\ldots (20)$$

جبکہ ن طاق ہو۔

۸۸ ——— جملہ جم ن ط - جم ن ف کو جم ط کا ن ویں درجہ کا ایک جبری تفاعل خیال کیا جا سکتا ہے اور اس لیے اُس کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے؛ جم ط کی وہ قیمتیں جن کے لیے یہ جملہ معدوم ہوتا ہے یہ ہیں

$$\text{جم ف}،\ \text{جم}\left(\text{ف} + \frac{2\pi}{\text{ن}}\right)،\ \text{جم}\left(\text{ف} + \frac{4\pi}{\text{ن}}\right)،\ \ldots\ldots$$

اس لیے

$$\text{جم ن ط} - \text{جم ن ف} = 2^{\text{ن}-1} \prod_{\text{ر}=0}^{\text{ر}=\text{ن}-1} \left\{\text{جم ط} - \text{جم}\left(\text{ف} + \frac{2\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)\right\} \ldots\ldots (21)$$

۸۹ ——— [1] اب ہم جملہ $\text{لا}^{2\text{ن}} - 2\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن ط} + 1$ کے اجزائے ضربی معلوم کرینگے۔

$$\text{لا}^{\text{ن}} - 2\,\text{جم ن ط} + \text{لا}^{-\text{ن}} = \left(\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{لا}^{-\text{ن}+1}\right)\left(\text{لا} - 2\,\text{جم ط} + \text{لا}^{-1}\right)$$
$$+ 2\,\text{جم ط}\left(\text{لا}^{\text{ن}-1} - 2\,\text{جم}(\text{ن}-1)\,\text{ط} + \text{لا}^{-\text{ن}+1}\right)$$
$$- \left(\text{لا}^{\text{ن}-2} - 2\,\text{جم}(\text{ن}-2)\,\text{ط} + \text{لا}^{-\text{ن}+2}\right)$$

---

[1] فیررز (Ferrers) نے یہ طریقہ میسنجر آف میتھمیٹکس کی پانچویں جلد میں بیان کیا ہے۔

اگر ہم $لا^{ن} - ۲ \, جم \, ن \, ط + لا^{-ن}$ کو $ع_{ن}$ سے تعبیر کریں تو ہم اس متماثلہ کو لکھ سکتے ہیں

$$ع_{ن} = \left(لا^{ن-۱} + لا^{-(ن+۱)}\right) ع_{۱} + ۲ ع_{ن-۱} \, جم \, ط - ع_{ن-۲} ؛$$

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ $ع_{ن}$، $ع_{۱}$ سے تقسیم پذیر ہے بشرطیکہ $ع_{ن-۱}$ اور $ع_{ن-۲}$، $ع_{۱}$ سے تقسیم پذیر ہوں۔

اب $$ع_{۲} = \left(لا - ۲ \, جم \, ط + لا^{-۱}\right)\left(لا + ۲ \, جم \, ط + لا^{-۱}\right)$$

اس لیے $ع_{۲}$، $ع_{۱}$ سے تقسیم پذیر ہے اور اس لیے $ع_{۳}$ بھی تقسیم پذیر ہے اور علیٰ ہٰذالقیاس۔

پس $ع_{ن}$، $ع_{۱}$ سے تقسیم پذیر ہے اور اس لیے $لا^{۲ن} - ۲ لا^{ن} \, جم \, ن \, ط + ۱$ کا ایک (118)
جزوِ ضربی $لا^{۲} - ۲ لا \, جم \, ط + ۱$ ہے؛ اب چونکہ جم ن ط کو بدلے بغیر ط کو $ط + \frac{۲ ر \pi}{ن}$ میں تبدیل کیا جا سکتا ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$لا^{۲} - ۲ لا \, جم \left(ط + \frac{۲ ر \pi}{ن}\right) + ۱$$

دیے ہوئے جملہ کا ایک جزو ضربی ہے جبکہ ر کوئی صحیح عدد ہو۔ اگر ہم فرض کریں ر = ۰، ۱، ۲، ... ن − ۱ تو ہمیں دیے ہوئے جملہ کے ن مختلف اجزائے ضربی حاصل ہوتے ہیں اور کل اجزائے ضربی یہی ہیں، پس

$$لا^{۲ن} - ۲ لا^{ن} \, جم \, ن \, ط + ۱ = \prod_{ر=۰}^{ر=ن-۱} \left\{لا^{۲} - ۲ لا \, جم \left(ط + \frac{۲ ر \pi}{ن}\right) + ۱\right\} \quad ...(۲۲)$$

اس کو شکل ذیل میں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$لا^{۲ن} - ۲ لا^{ن} ا^{ن} \, جم \, ن \, ط + ا^{۲ن} = \prod_{ر=۰}^{ر=ن-۱} \left\{لا^{۲} - ۲ لا \, ا \, جم \left(ط + \frac{۲ ر \pi}{ن}\right) + ا^{۲}\right\} \quad ...(۲۳)$$

۹۰ —— مساوات (۲۲) میں رکھو ط = ۰ تو

$$\left(لا^{ن} - ۱\right)^{۲} = \prod_{ر=۰}^{ر=ن-۱} \left(لا^{۲} - ۲ لا \, جم \frac{۲ ر \pi}{ن} + ۱\right)$$

اور چونکہ جم $\frac{۲\,\text{ر}\,\pi}{\text{ن}}$ = جم $\frac{۲(\text{ن}-\text{ر})\pi}{\text{ن}}$ اس لیے بائیں جانب کے اجزائے ضربی میں سے دو دو مساوی ہیں اِلّا آنکہ جب، ن جفت ہو تو ایک واحد جزوِ ضربی $\text{لا}^۲ + ۲\,\text{لا} + ۱$ ہے، اور خواہ ن جفت ہو یا طاق بہرصورت جزو ضربی $\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا} + ۱$ ہے؛ اس لیے

$$\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = (\text{لا}^۲ - ۱) \prod_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۲)} \left(\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲\,\text{ر}\,\pi}{\text{ن}} + ۱\right) \quad \ldots\ (۲۴)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = (\text{لا} - ۱) \prod_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۱)} \left(\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲\,\text{ر}\,\pi}{\text{ن}} + ۱\right) \quad \ldots\ (۲۵)$$

جبکہ ن طاق ہو۔

نیز ضابطہ (۲۲) میں $\text{ط} = \frac{\pi}{\text{ن}}$ رکھنے سے

$$(\text{لا}^{\text{ن}} + ۱)^۲ = \prod_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}-۱} \left\{\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{(۲\,\text{ر}+۱)\pi}{\text{ن}} + ۱\right\}؛$$

لیکن جم $\frac{(۲\,\text{ر}+۱)\pi}{\text{ن}}$ = جم $\frac{۲(\text{ن}-\text{ر})-۱}{\text{ن}}\pi$

اس لیے دو دو اجزائے ضربی مساوی ہیں اِلّا آنکہ جب، ن طاق ہو تو واحد جزو ضربی $\text{لا}^۲ + ۲\,\text{لا} + ۱$ ہے؛ پس

$$\text{لا}^{\text{ن}} + ۱ = \prod_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}\text{ن}-۱} \left\{\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{(۲\,\text{ر}+۱)\pi}{\text{ن}} + ۱\right\} \quad \ldots\ (۲۶)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

(119)
$$\text{لا}^{\text{ن}} + ۱ = (\text{لا} + ۱) \prod_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۳)} \left\{\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{(۲\,\text{ر}+۱)\pi}{\text{ن}} + ۱\right\} \quad \ldots\ (۲۷)$$

جبکہ ن طاق ہو۔

۱۹ ـــــ مساوات (۲۲) میں رکھو لا = ۱ تو

$$\text{۱} - \text{جم ن ط} = \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}} \prod_{\text{ر}=\text{۰}}^{\text{ر}=\text{ن}-\text{۱}} \left\{ \text{۱} - \text{جم}\left(\text{ط} + \frac{\text{۲ر}\pi}{\text{ن}}\right) \right\} \text{؛}$$

ط کو ۲ ط میں تبدیل کرنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{جب}^{\text{۲}}\,\text{ن ط} = \text{۲}^{\text{۲ن}-\text{۲}}\,\text{جب}^{\text{۲}}\,\text{ط}\ \text{جب}^{\text{۲}}\left(\text{ط} + \frac{\pi}{\text{ن}}\right) \text{جب}^{\text{۲}}\left(\text{ط} + \frac{\text{۲}\pi}{\text{ن}}\right) \ldots \text{جب}^{\text{۲}}\left(\text{ط} + \frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{ن}}\pi\right)$$

یا

$$\text{جب ن ط} = \pm\,\text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{جب ط}\ \text{جب}\left(\text{ط} + \frac{\pi}{\text{ن}}\right) \text{جب}\left(\text{ط} + \frac{\text{۲}\pi}{\text{ن}}\right) \ldots \text{جب}\left(\text{ط} + \frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{ن}}\pi\right)$$

جس میں مبہم علامت ابتک غیر معین ہے۔ دفعہ ۱۵ میں یہ بتایا جا چکا ہے کہ جب ط اور جم ط کی رقوم میں جب ن ط کے پھیلاؤ کی شکل معین ہے، اس لیے بائیں جانب کے حاصل ضرب کی علامت ہمیشہ ایک ہی ہے! اب رکھو ط = $\frac{\pi}{\text{۲ن}}$ تو صریحاً علامت جو لیجانی چاہیے مثبت ہے کیونکہ ہر جزوِ ضربی مثبت ہے۔

اس لیے

$$\text{جب ن ط} = \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{جب ط}\ \text{جب}\left(\text{ط} + \frac{\pi}{\text{ن}}\right) \text{جب}\left(\text{ط} + \frac{\text{۲}\pi}{\text{ن}}\right) \ldots \text{جب}\left(\text{ط} + \frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{ن}}\pi\right) \quad \ldots\ (\text{۲۸})$$

(اگر ۲۸) میں ط کو ط + $\frac{\pi}{\text{۲ن}}$ سے بدل دیا جائے تو

$$\text{جم ن ط} = \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{جب}\left(\text{ط} + \frac{\pi}{\text{۲ن}}\right) \text{جب}\left(\text{ط} + \frac{\text{۳}\pi}{\text{۲ن}}\right) \ldots \text{جب}\left(\text{ط} + \frac{\text{۲ن}-\text{۱}}{\text{۲ن}}\pi\right) \quad \ldots\ (\text{۲۹})$$

مسئلہ (۲۸) میں ط = ۰ رکھنے اور جذر المربع لینے سے مسئلہ (۱۸) حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح (۲۹) سے مسئلہ (۱۵) اخذ کیا جا سکتا ہے۔

امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ اگر ن ایک طاق صحیح عدد ہو تو جب ن ط + جم ن ط
جب ط + جم ط سے، ورنہ جب ط - جم ط سے
تقسیم پذیر ہے۔

فرض کرو $ع_ن$ = جب ن ط + جم ن ط

تب $ع_ن + ع_{ن-۴} = ۲\,\text{جم}\,۲\text{ط} \times ع_{ن-۲} = ۲(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جب}^۲\text{ط})\, ع_{ن-۲}$

پس اگر $ع_{ن-۴}$، جم ط + جب ط سے یا جم ط - جب ط سے تقسیم پذیر ہے تو $ع_ن$ بھی اسی مقدار سے تقسیم پذیر ہے۔ اب $ع_۱$ = جب ط + جم ط، اس لیے $ع_۵$، $ع_۹$، $ع_{۱۳}$، ... سب کے سب جب ط + جم ط سے تقسیم پذیر ہیں، نیز $ع_{-۱}$ = جم ط - جب ط اس لیے $ع_۳$، $ع_۷$، $ع_{۱۱}$، ... سب کے سب جم ط - جب ط سے تقسیم پذیر ہیں۔

(۲) مس ن ط - مس ن ع کے اجزائے ضربی دریافت کرو۔

$$\text{مس ن ط} - \text{مس ن ع} = \frac{\text{جب ن}(\text{ط} - \text{ع})}{\text{جم ن ط جم ن ع}}$$

(120) ضابطہ (۲۸) میں ط کی بجائے ع - ط رکھو تو

$$\text{جب ن}(\text{ط} - \text{ع}) = (-۱)^{ن-۱}\, ۲^{ن-۱} \prod_{ر=۰}^{ر=ن-۱} \text{جب}\left(\text{ط} - \text{ع} - \frac{ر\pi}{ن}\right)$$

$$= (-۱)^{ن-۱}\, ۲^{ن-۱}\, \text{جم}^{ن}\text{ط} \prod_{ر=۰}^{ر=ن-۱} \text{جم}\left(\text{ع} + \frac{ر\pi}{ن}\right)\left\{\text{مس ط میں}\left(\text{ع} + \frac{ر\pi}{ن}\right)\right\}$$

$$= (-۱)^{ن-۱}\, \text{جم}^{ن}\text{ط جب ن}\left(\text{ع} + \frac{\pi}{۲}\right) \prod_{ر=۰}^{ر=ن-۱} \left\{\text{مس ط} - \text{مس}\left(\text{ع} + \frac{ر\pi}{ن}\right)\right\}$$

نیز (۱۶) اور (۱۷) سے

$$\text{جم ن ط} = \text{جم ط} \prod_{ر=۱}^{ر=\frac{۱}{۲}(ن-۱)} \left(۱ - \frac{\text{جب}^۲\text{ط}}{\text{جب}^۲\,\frac{۲ر-۱}{۲ن}\pi}\right) \text{ یا } \prod_{ر=۱}^{ر=\frac{۱}{۲}ن} \left(۱ - \frac{\text{جب}^۲\text{ط}}{\text{جب}^۲\,\frac{۲ر-۱}{۲ن}\pi}\right)$$

بموجب اس کے کہ ن طاق ہے یا جفت۔ اب $\text{۱} - \frac{\text{جب}^{\text{۲}}\text{ط}}{\text{جب}^{\text{۲}}\text{ب}} = \text{جم}^{\text{۲}}\text{ط}\left(\text{۱} - \frac{\text{مس}^{\text{۲}}\text{ط}}{\text{مس}^{\text{۲}}\text{ب}}\right)$ اس لیے
جم ن ط کا جملہ لکھا جا سکتا ہے

$$\text{جم}^{\text{ن}}\text{ط}\prod_{\text{ر}=\text{۱}}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-\text{۱})}\left(\text{۱}-\frac{\text{مس}^{\text{۲}}\text{ط}}{\text{مس}^{\text{۲}}\frac{\text{۲ر}-\text{۱}}{\text{۲ن}}\pi}\right)\ \text{یا}\ \text{جم}^{\text{ن}}\text{ط}\prod_{\text{ر}=\text{۱}}^{\text{ر}=\frac{1}{2}\text{ن}}\left(\text{۱}-\frac{\text{مس}^{\text{۲}}\text{ط}}{\text{مس}^{\text{۲}}\frac{\text{۲ر}-\text{۱}}{\text{۲ن}}\pi}\right)$$

اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس ن ط} - \text{مس ن ع} = (-\text{۱})^{\text{ن}-\text{۱}}\frac{\text{جب ن}\left(\text{ع}+\frac{\pi}{2}\right)}{\text{جم ن ع}}\cdot\frac{\prod_{\text{ر}=\text{۰}}^{\text{ر}=\text{ن}-\text{۱}}\left\{\text{مس ط}-\text{مس}\left(\text{ع}+\frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)\right\}}{\prod_{\text{ر}=\text{۱}}\left(\text{۱}-\frac{\text{مس}^{\text{۲}}\text{ط}}{\text{مس}^{\text{۲}}\frac{\text{۲ر}-\text{۱}}{\text{۲ن}}\pi}\right)}$$

نسب نما میں حاصل ضرب، $\text{ر} = \frac{1}{2}\text{ن}$ یا $\text{ر} = \frac{1}{2}(\text{ن}-\text{۱})$ تک لینا چاہیے بموجب اس کے کہ ن جفت ہو یا طاق۔

ساتویں باب پر مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ اگر ن ایک طاق مثبت صحیح عدد ہو اور $\text{ع} = \frac{\pi}{\text{ن}}$ تو

$$\text{مس ن ف} = (-\text{۱})^{\frac{1}{2}(\text{ن}-\text{۱})}\,\text{مس ف مس}(\text{ف}+\text{ع})\ldots\text{مس}(\text{ف}+\overline{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{ع})$$

اور $$\text{ن مس ن ف} = \text{مس ف} + \text{مس}(\text{ف}+\text{ع}) + \ldots + \text{مس}(\text{ف}+\overline{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{ع})$$

۲۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب ۵ط} - \text{جم ۵ط}}{\text{جب ۵ط} + \text{جم ۵ط}} = \text{مس}\left(\text{ط}-\frac{1}{4}\pi\right)\frac{\text{۱}-\text{۲جب ۲ط}-\text{۴جب}^{\text{۲}}\text{۲ط}}{\text{۱}+\text{۲جب ۲ط}-\text{۴جب}^{\text{۲}}\text{۲ط}}$$

۳۔ ثابت کرو کہ

ن مم ن عہ = مم عہ + مم $\left(عہ + \frac{\pi}{ن}\right)$ + ... + مم $\left(عہ + \frac{ن-1}{ن}\pi\right)$

(121) جہاں ن ایک صحیح عدد ہے۔

۴ ۔ اگر فہ = $\frac{\pi}{13}$ تو ثابت کرو کہ

جم فہ + جم ۳ فہ + جم ۹ فہ = $\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{13}\right)$،

اور جم ۵ فہ + جم ۷ فہ + جم ۱۱ فہ = $\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{13}\right)$

۵ ۔ ثابت کرو کہ

جم $\frac{\pi}{15}$ جم $\frac{2\pi}{15}$ جم $\frac{3\pi}{15}$ ... جم $\frac{7\pi}{15}$ = $\left(\frac{1}{2}\right)^7$

۶ ۔ ثابت کرو کہ

جم $\frac{2\pi}{7}$ + جم $\frac{4\pi}{7}$ + جم $\frac{8\pi}{7}$ = $-\frac{1}{2}$

وہ کعبی مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہیں

جم $\frac{2\pi}{7}$، جم $\frac{4\pi}{7}$، جم $\frac{8\pi}{7}$

۷ ۔ ثابت کرو کہ مساوات

$لا^3 - 3\sqrt{3}\,لا^2 - 3\,لا + \sqrt{3} = 0$

کی اصلیں مس ۲۰°، مس ۸۰°، مس ۱۴۰° ہیں۔

۸ ۔ ثابت کرو کہ

$جب^4$ عہ + $جب^4$ ۳ عہ + $جب^4$ ۷ عہ + $جب^4$ ۹ عہ + $جب^4$ ۱۱ عہ + $جب^4$ ۱۳ عہ + $جب^4$ ۱۷ عہ + $جب^4$ ۱۹ عہ = $\frac{13}{4}$

جہاں عہ = $\frac{\pi}{20}$

۹ ۔ ثابت کرو کہ

$2^{ن-1}$ جب فہ جب $\left(فہ + \frac{2\pi}{ن}\right)$ جب $\left(فہ + \frac{4\pi}{ن}\right)$ .... جب $\left(فہ + \frac{2ن-1}{ن}\pi\right)$

= جم $\frac{ن\pi}{2}$ − جم ن $\left(فہ + \frac{\pi}{2}\right)$

۱۰- ثابت کرو کہ

$$\text{مس عہ} + \text{مس}\left(\frac{\pi}{\text{۲ن}} - \text{عہ}\right) + \text{مس}\left(\frac{\text{۲}\pi}{\text{۲ن}} + \text{عہ}\right) + \text{مس}\left(\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲ن}} - \text{عہ}\right) \ldots\ldots$$

$$\text{۲ن ارقام تک} = \text{۲ن قم ۲ن عہ}$$

۱۱- ثابت کرو کہ

$$\text{جب}\,\frac{\text{۲}\pi}{\text{۲ن}}\ \text{جب}\,\frac{\text{۴}\pi}{\text{۲ن}} \ldots\ \text{جب}\,\frac{\text{ن}-\text{۴}}{\text{۲ن}}\pi\ \text{جب}\,\frac{\text{ن}-\text{۲}}{\text{۲ن}}\pi\ \text{جب}\,\frac{\text{ن}\pi}{\text{۲ن}} = \sqrt{\frac{\text{ن}}{\text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}}}$$

جہاں ن ایک جفت مثبت صحیح عدد ہے -

۱۲- ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ن}}{\text{۲ن}-\text{۱}} = \frac{\text{جب}^{\text{۲}}\frac{\pi}{\text{۲ن}}}{\text{جب}^{\text{۲}}\frac{\pi}{\text{۲ن}-\text{۱}}} \times \frac{\text{جب}^{\text{۲}}\frac{\text{۲}\pi}{\text{۲ن}}}{\text{جب}^{\text{۲}}\frac{\text{۲}\pi}{\text{۲ن}-\text{۱}}} \times \ldots \times \frac{\text{جب}^{\text{۲}}\left(\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲ن}}\pi\right)}{\text{جب}^{\text{۲}}\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲ن}-\text{۱}}\pi}$$

جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے -

۱۳- ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب ن فہ جب ن طہ}}{\text{جب فہ جب طہ}} = \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\left\{\text{جم}(\text{فہ}-\text{طہ}) - \text{جم}\left(\text{فہ}+\text{طہ}+\frac{\text{۲}\pi}{\text{ن}}\right)\right\}\left\{\text{جم}(\text{فہ}-\text{طہ}) - \text{جم}\left(\text{فہ}+\text{طہ}+\frac{\text{۴}\pi}{\text{ن}}\right)\right\}\ldots\ldots$$

بائیں جانب اجزائے ضربی کی تعداد ن - ۱ ہے -

۱۴- ثابت کرو کہ م جب ن طہ - ن جب م طہ، $\text{جب}^{\text{۳}}$ طہ سے تقسیم پذیر ہے اگر م اور ن طاق (122)
صحیح عدد ہوں -

۱۵- ثابت کرو کہ اگر م ایک مثبت صحیح عدد ہو تو $\text{قط}^{\text{۲م}}\,\text{ا}$، $\text{۱}+\text{قم}^{\text{۲}}\,\text{ا}$، قم ۲ ا کی قوتوں کے ایک سلسلہ سے بیان کیا جا سکتا ہے -

۱۶- ثابت کرو کہ
$$\text{ن} = \frac{\text{جب ۲عہ جب ۴عہ} \ldots \text{جب}(\text{۲ن}-\text{۲})\text{عہ}}{\text{جب عہ جب ۳عہ} \ldots \text{جب}(\text{۲ن}-\text{۱})\text{عہ}}$$

جہاں $\text{عہ} = \frac{\pi}{\text{۲ن}}$

۱۷ - ثابت کرو کہ

$$(۱)\quad \frac{\text{جب}^۲\,\text{لا}}{\text{جب}(\text{لا}-\text{ا})\,\text{جب}(\text{لا}-\text{ب})\,\text{جب}(\text{لا}-\text{ج})} = \Sigma\, \frac{\text{جب}^۲\,\text{ا}}{\text{جب}(\text{لا}-\text{ا})\,\text{جب}(\text{ا}-\text{ب})\,\text{جب}(\text{ا}-\text{ج})}$$

$$(۲)\quad \frac{\text{جب لا}}{\text{جب}(\text{لا}-\text{ا})\,\text{جب}(\text{لا}-\text{ب})\,\text{جب}(\text{لا}-\text{ج})} = \Sigma\, \frac{\text{جم}(\text{لا}-\text{ا})\,\text{جب ا}}{\text{جب}(\text{لا}-\text{ا})\,\text{جب}(\text{ا}-\text{ب})\,\text{جب}(\text{ا}-\text{ج})}$$

۱۸ - ثابت کرو کہ

$$۱+\text{جم ع}،\ ۱+\text{جم}\left(\text{ع}+\frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)،\ \ldots،\ ۱+\text{جم}\left(\text{ع}+\frac{۲(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}\right)$$

کا حاصل ضرب ہے

$$۲^{۲-\text{ن}}\left\{(-۱)^{\frac{۱}{۲}\text{ن}}-\text{جم}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ن ع}\right\}^۲ \quad \text{یا} \quad ۲^{۱-\text{ن}}\,(۱+\text{جم ن ع})$$

بموجب اس کے کہ ن جفت ہے یا طاق۔

۱۹ - ثابت کرو کہ

$$\text{ن}^۲ = \left(\text{سہ}\,\frac{\pi}{۲\text{ن}}\right)^{-۱} + \left(\text{سہ}\,\frac{۳\pi}{۲\text{ن}}\right)^{-۱} + \left(\text{سہ}\,\frac{۵\pi}{۲\text{ن}}\right)^{-۱} + \cdots$$

بائیں جانب ن رقمیں لیگئی ہیں -

۲۰ - ثابت کرو کہ

$$(\text{مس}\,۷\tfrac{۱}{۲}^\circ + \text{مس}\,۳۷\tfrac{۱}{۲}^\circ + \text{مس}\,۶۷\tfrac{۱}{۲}^\circ)(\text{مس}\,۲۲\tfrac{۱}{۲}^\circ + \text{مس}\,۵۲\tfrac{۱}{۲}^\circ + \text{مس}\,۸۲\tfrac{۱}{۲}^\circ) = ۱۷ + ۸\sqrt{۳}$$

۲۱ - اگر م طاق ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس م فہ} = \text{مس فہ}\ \text{مم}\left(\text{فہ}+\frac{\pi}{۲\text{م}}\right)\text{مس}\left(\text{فہ}+\frac{۲\pi}{۲\text{م}}\right)\ldots\text{مم}\left(\text{فہ}+\frac{\text{م}-۲}{۲\text{م}}\pi\right)\text{مس}\left(\text{فہ}+\frac{\text{م}-۱}{۲\text{م}}\pi\right)$$

۲۲ - اگر ۲۸ ع = π تو ثابت کرو کہ

$\sqrt{14}$ = 2^{13} جب عہ جب ۲عہ × ... × جب ۱۳عہ،

اور جم ۲عہ + جم ۶عہ + جم ۸عہ = $\frac{1}{2}\sqrt{7}$

۲۳ - ثابت کرو کہ مس $\frac{\pi}{2ن}$ مس $\frac{2\pi}{2ن}$ × ... × مس $\frac{ن-1}{2ن}\pi$ = ۱

جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے -

۲۴ - ثابت کرو کہ

قم لا + قم (لا + $\frac{2\pi}{ن}$) + ... + قم (لا + $\frac{2(ن-1)\pi}{ن}$)

= ن {قم ن لا + قم (ن لا + π) + ... + قم (ن لا + $\overline{ن-1}\,\pi$)}

۲۵ - ثابت کرو کہ (123)

۲(۱ + جم ن ط) یا $\frac{(1 + \text{جم ن ط})}{1 + \text{جم ط}}$

۲ جم ط کے ایک منطق صحیح تفاعل کا مربع ہے بموجب اس کے کہ ن جفت ہے یا طاق - دکھاؤ کہ

۱ + جم ۹ط = (۱ + جم ط)(۱۶ جم^{4} ط - ۸ جم^{3} ط - ۱۲ جم^{2} ط + ۴ جم ط + ۱)^{2}

۲۶ - ثابت کرو کہ $2^{ن-1}$ جم^{ن} ط - جم ن ط، ۱ + ۲ جم ۲ط سے تقسیم پذیر ہے اگر ن کی شکل ۶م - ۱ ہو اور (۱ + ۲ جم ۲ط)^{2} سے تقسیم پذیر ہے اگر ن کی شکل ۶م + ۱ ہو جہاں م ایک مثبت صحیح عدد ہے -

ثابت کرو کہ

2^{10} جم^{11} ط - جم ۱۱ط = ۱۱ جم ط (۱ + ۲ جم ۲ط) {(۱ + ۲ جم ۲ط)^{3} + (۱ + ۲ جم ۲ط) + ۱}

۲۷ - اگر ن ایک طاق مثبت صحیح عدد ہو اور

مس ($\frac{1}{4}\pi$ + $\frac{1}{2}$ فہ) = مس^{ن} ($\frac{1}{4}\pi$ + $\frac{1}{2}$ ط)

تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب فہ} = \text{ن جب ط} \prod_{\text{ر}=1}^{\frac{1}{2}(\text{ن}-1)} \left\{ \frac{1 + \text{جب}^2\,\text{ط جم}^2 \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}{1 + \text{جب}^2\,\text{ط مس}^2 \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}} \right\}$$

۲۸ - ثابت کرو کہ شکل ف (جب ط، جم ط) \ فہ (جب ط، جم ط) کا کوئی تفاعل جہاں ف اور فہ سے ن درجے کے منطق صحیح تفاعل تعبیر ہوتے ہیں اور جن میں $\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{ط}$ شامل ہے شکل $\frac{\text{ا} \prod \text{جب} \frac{1}{2}(\text{ط} - \text{عہ})}{\prod \text{جب} \frac{1}{2}(\text{ط} - \text{عَہ})}$ میں بیان کیا جا سکتا ہے جہاں ا اور مقداریں عہ، عَہ منحصر نہیں ہیں ط پر اور شمار کنندہ میں ۲ ن اجزائے ضربی ہیں اور نسب نما میں ۲ ن اجزائے ضربی -

اگر تفاعل $\frac{\text{ا جم ۲ ط} + \text{ب جم ط} + \text{ج جب ط} + \text{د}}{\text{اَ جم ۲ ط} + \text{بَ جم ط} + \text{جَ جب ط} + \text{دَ}}$ کو اس شکل میں بیان کیا جائے تو

ثابت کرو کہ Σ عہ اور Σ عَہ، π کے جفت ضعیف ہیں -

۲۹ - ثابت کرو کہ　$\text{مس} \frac{3\pi}{11} + 4\,\text{جب} \frac{2\pi}{11} = \sqrt{11}$

۳۰ - ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{۶۴ جب}^7\,\text{ط} + \text{جب ۷ ط}}{\text{۶۴ جم}^7\,\text{ط} - \text{جم ۷ ط}} = \text{مس ط مس}^2\left(\text{ط} + \frac{\pi}{7}\right) \text{مس}^2\left(\text{ط} - \frac{\pi}{7}\right)$$

(124)

آٹھواں باب

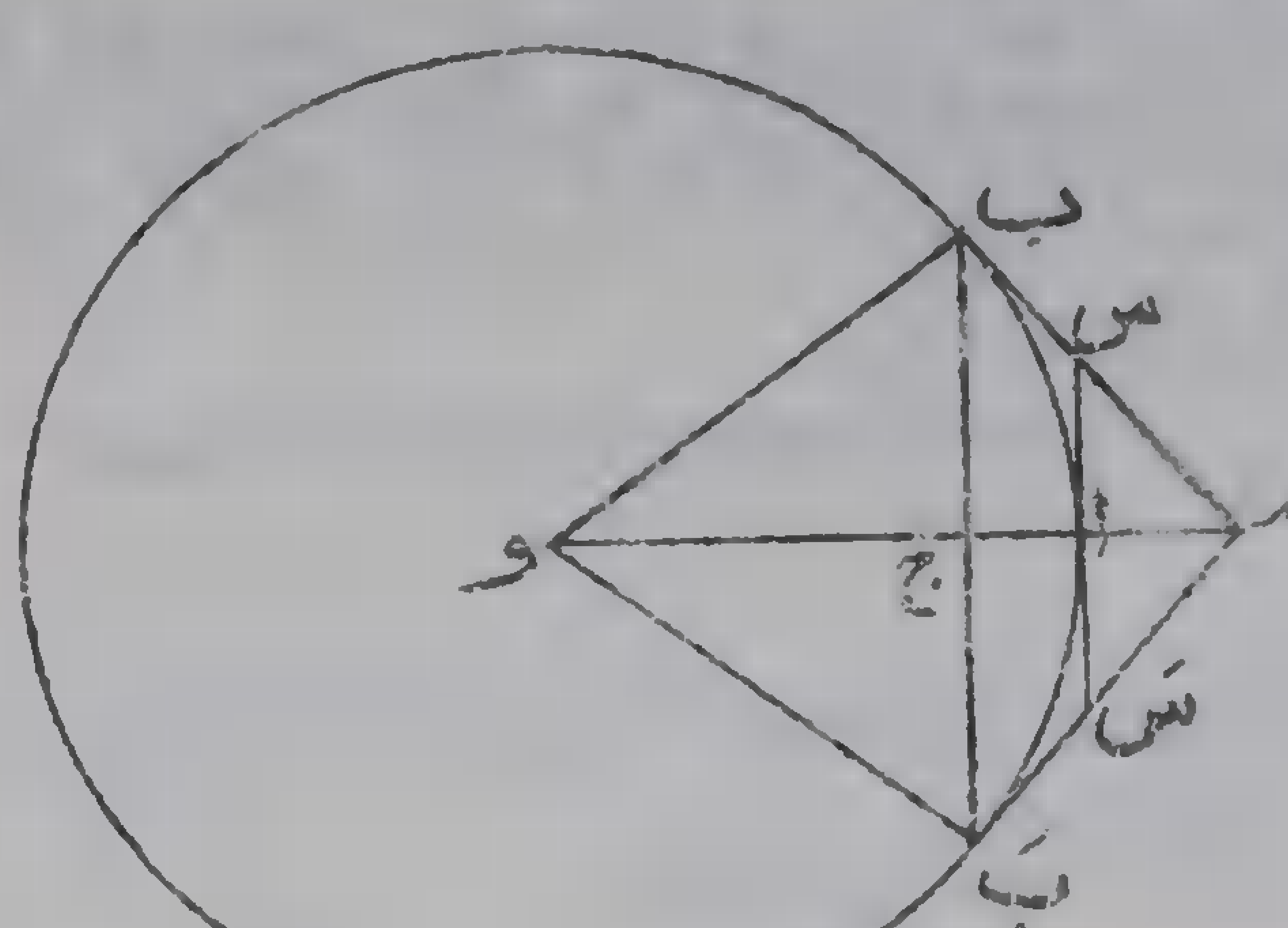
ایک زاویے کے دائری تفاعل اور دائری ناپ کے درمیان رشتے

۹۲ — اب ہم اُن مسئلوں کی تحقیق کرینگے جن سے ایسی حدود کا تعین ہوتا ہے جن کے درمیان ایک زاویہ کی جیب، جیب التمام، اور مماس واقع ہونے چاہئیں جبکہ اس زاویہ کا دائری ناپ ط، $\frac{1}{2}$ π سے کم ہو۔

پہلا مسئلہ جس کو ہم ثابت کرینگے یہ ہے کہ اگر ایک زاویہ کا دائری ناپ ط ہو جو $\frac{1}{2}$ π سے کم ہے تو

جب ط > ط > مس ط

اِلّا آنکہ ط = ۰۔



فرض کرو اوب = ا و بَ = ط؛ اور فرض کرو کہ م ب اور م بَ، ب اور بَ پر مماس ہیں، اور فرض کرو کہ ا پر کا مماس س ا سَ ہے۔ دفعہ ۱۱ میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ قوس ا ب کا طول، ا س + س ب سے متجاوز نہیں ہوتا؛ اور اس طرح قوس ب ا بَ، ب س + بَ سَ + س سَ سے تجاوز نہیں کرتی اور اس لیے قوس ب ا بَ < م ب + م بَ؛ یا قوس ب ا < ب م۔

نیز

قوس ب ا > ب ا > ب ج

اس لیے $\frac{\text{ب ج}}{\text{و ب}} < \frac{\text{قوس ب ا}}{\text{و ب}} < \frac{\text{ب م}}{\text{و ب}}$

اب ط = $\frac{\text{قوس ب ا}}{\text{و ب}}$، جب ط = $\frac{\text{ب ج}}{\text{و ب}}$ اور مس ط = $\frac{\text{ب م}}{\text{و ب}}$

(125) اس لیے جب ط < ط < مس ط۔ اگر ط، $\frac{1}{2}$ π سے بڑا ہوتا تو م، و کی دوسری جانب واقع ہوتا اور وہ نامساواتیں جن کو ہم نے استعمال کیا ہے ممکن ہے درست نہ رہتیں۔

چونکہ جب ط < ط < مس ط، اس لیے ۱ < $\frac{\text{ط}}{\text{جب ط}}$ < قط ط؛ اب فرض کرو کہ ط کو لا انتہا گھٹا دیا گیا ہے، تب قط ط کی انتہا جبکہ ط = ۰، ایک ہے؛ اس لیے نیز $\frac{\text{ط}}{\text{جب ط}}$ کی انتہا بھی جبکہ ط کو لا انتہا گھٹا دیا جاتا ہے ایک ہے۔ نیز چونکہ

$$\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = (\text{ط قم ط})^{-1} \text{ اور } \frac{\text{مس ط}}{\text{ط}} = \text{قط ط} \times (\text{ط قم ط})^{-1}$$

اس لیے ہمیں یہ مسئلے ملتے ہیں کہ $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ اور $\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}$ کی انتہا جبکہ ط

کو لاانتہا گھٹا دیا جائے ہر ایک ایک ہے۔

اس مسئلہ کو یوں بھی ثابت کیا جا سکتا ہے:۔ مثلث و ا ب، قاطع و ا بَ اور مثلث و ب م مقدار کی صعودی ترتیب میں ہیں؛ اور مثلث و ا ب = $\frac{1}{2}$ و ا × ب ج = $\frac{1}{2}$ و ا^2 جب ط، نیز قاطع و ا ب = $\frac{1}{2}$ و ا^2 × ط، اور

$$\triangle\ \text{و ب م} = \frac{1}{2}\ \text{و ب} \times \text{ب م} = \frac{1}{2}\ \text{و ب}^2 \times \text{مس ط}$$

اس لیے جب ط > ط > مس ط

۹۳ ——— دفعہ ۵ میں یہ بیان کیا گیا تھا کہ نظری مقاصد کے لیے زاویہ کا دائری ناپ دوسرے ناپوں کے مقابلہ میں زیادہ سہولت بخش ہے، اس کا سبب یہ ہے کہ اس ناپ میں زاویہ کی جیب اور مماس دونوں انتہا میں خود زاویہ کے مساوی ہوتے ہیں جبکہ زاویہ کو لاانتہا گھٹا دیا جاتا ہے؛ لیکن اگر ہم کوئی اور ناپ استعمال کریں، مثلاً ثانیے، تو یہ صورت نہیں ہوتی۔ چنانچہ ثانیوں کی صورت میں

$$\frac{\text{جب ن}''}{\text{ن}''} = \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} \times \frac{\pi}{60 \times 60 \times 180}$$

$$\frac{\text{مس ن}''}{\text{ن}''} = \frac{\text{مس ط}}{\text{ط}} \times \frac{\pi}{60 \times 60 \times 180}$$

جہاں ن ثانیوں کا دائری ناپ ط ہے؛ اس لیے $\frac{\text{جب ن}''}{\text{ن}''}$، $\frac{\text{مس ن}''}{\text{ن}''}$ کی انتہاؤں میں سے ہر ایک جبکہ ن کو لاانتہا گھٹا دیا جائے $\frac{\pi}{60 \times 60 \times 180}$ کے مساوی ہے۔ بس اگر ہم دائری ناپ کی بجائے ثانیے استعمال کریں تو ضابطوں کی اُس بڑی جماعت میں جس میں ط = ۰ کے لیے $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ اور $\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}$ کی انتہائیں شریک ہوتی ہیں ایک کی بجائے ہمیشہ عدد $\frac{\pi}{60 \times 60 \times 180}$

واقع ہوتا رہیگا۔

$\text{م جب}\ \frac{\text{ع}}{\text{م}}$، $\text{م مس}\ \frac{\text{ع}}{\text{م}}$ میں سے ہر ایک کی اِنتہا جبکہ م لا انتہا بڑا کیا جاتا ہے، (126)
ع ہے، کیونکہ $\text{م جب}\ \frac{\text{ع}}{\text{م}} = \text{ع}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)$، $\text{م مس}\ \frac{\text{ع}}{\text{م}} = \text{ع}\left(\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}\right)$ جہاں
$\text{ط} = \frac{\text{ع}}{\text{م}}$، اور جب م کو لا انتہا بڑا کیا جاتا ہے تو ط لا انتہا چھوٹا ہو جاتا ہے۔

$\frac{\text{جب ف ط}}{\text{جب ق ط}}$ اور $\frac{\text{مس ف ط}}{\text{مس ق ط}}$ میں سے ہر ایک کی انتہا جبکہ ط لا انتہا گھٹا دیا جائے

$\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ کے مساوی ہے۔

۹۴ — اگر $\text{ط} < \frac{1}{2}\pi$ تو $\text{مس}\ \frac{1}{2}\text{ط} > \frac{1}{2}\text{ط}$ اور $\text{جب}\ \frac{1}{2}\text{ط} >$
$\frac{1}{2}\text{ط جم}\ \frac{1}{2}\text{ط}$، اس لیے

$$\text{۲ جب}\ \frac{1}{2}\text{ط}.\text{جم}\ \frac{1}{2}\text{ط} > \text{ط جم}^2\ \frac{1}{2}\text{ط}$$

یا $$\text{جب ط} > \text{ط}\left(1 - \text{جب}^2\ \frac{1}{2}\text{ط}\right)$$

اب $$\text{جب}^2\ \frac{1}{2}\text{ط} < \left(\frac{1}{2}\text{ط}\right)^2$$

اس لیے $\text{جب ط} > \text{ط}\left(1 - \frac{1}{4}\text{ط}^2\right)$، یا $\text{جب ط} > \text{ط} - \frac{1}{4}\text{ط}^3$

نیز $\text{جم ط} = 1 - 2\ \text{جب}^2\ \frac{1}{2}\text{ط}$ اور یہ بڑا ہے $1 - 2\left(\frac{1}{2}\text{ط}\right)^2$ سے یا

$$\text{جم ط} > 1 - \frac{1}{2}\text{ط}^2$$

نیز چونکہ $\text{جب}\ \frac{1}{2}\text{ط} > \frac{1}{2}\text{ط} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\text{ط}\right)^3$ اس لیے

$$\text{جم ط} > 1 - 2\left(\frac{1}{2}\text{ط} - \frac{1}{48}\text{ط}^3\right)^2 > 1 - \frac{1}{2}\text{ط}^2 + \frac{1}{24}\text{ط}^4 - 2\frac{\text{ط}^6}{48^2}$$

پس $\text{جم ط} > 1 - \frac{1}{2}\text{ط}^2 + \frac{1}{24}\text{ط}^4$ ۔ محصلہ نتائج کو بیان کیا جا سکتا ہے اس طرح:

اگر ایک زاویہ کا دائری ناپ ط، ہو جو $\frac{1}{2}\pi$ سے کم ہے

تو جب ط، ط اور $\text{ط} - \frac{۱}{۴}\text{ط}^{۳}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے اور
جم ط

$$۱ - \frac{۱}{۲}\text{ط}^{۲} \quad \text{اور} \quad ۱ - \frac{۱}{۲}\text{ط}^{۲} + \frac{۱}{۱۶}\text{ط}^{۴}$$

کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۹۵ — اب ہم یہ دکھائینگے کہ اگر $\text{ط} < \frac{۱}{۲}\pi$ تو

$$\text{جب ط} > \text{ط} - \frac{۱}{۶}\text{ط}^{۳} \quad \text{اور} \quad \text{جم ط} < ۱ - \frac{۱}{۲}\text{ط}^{۲} + \frac{۱}{۲۴}\text{ط}^{۴}$$

اس سے جب ط اور جم ط کی حدود دفعہ سابق میں حاصل کردہ حدود سے زیادہ تنگ ہو جاتی ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ

$$۳\,\text{جب}\,\frac{۱}{۳}\text{ط} - \text{جب ط} = ۴\,\text{جب}^{۳}\,\frac{۱}{۳}\text{ط}،$$

$$۳\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۳^{۲}} - \text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۳} = ۴\,\text{جب}^{۳}\,\frac{\text{ط}}{۳^{۲}}،$$

- - - - - - - - - - - - - -

$$۳\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۳^{\text{ن}}} - \text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۳^{\text{ن}-۱}} = ۴\,\text{جب}^{۳}\,\frac{\text{ط}}{۳^{\text{ن}}}$$

ان مساواتوں کو علی الترتیب ۱، ۳، $۳^{۲}$، ...، $۳^{\text{ن}-۱}$ سے ضرب دو اور پھر جمع کرو تو

$$۳^{\text{ن}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۳^{\text{ن}}} - \text{جب ط} = ۴\left(\text{جب}^{۳}\,\frac{\text{ط}}{۳} + ۳\,\text{جب}^{۳}\,\frac{\text{ط}}{۳^{۲}} + \cdots + ۳^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}^{۳}\,\frac{\text{ط}}{۳^{\text{ن}}}\right)$$ (127)

اس لیے

$$\text{ط} \times \frac{\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۳^{\text{ن}}}}{\frac{\text{ط}}{۳^{\text{ن}}}} - \text{جب ط} < ۴\left(\frac{\text{ط}^{۳}}{۳^{۳}} + \frac{\text{ط}^{۳}}{۳^{۵}} + \cdots + \frac{\text{ط}^{۳}}{۳^{۲\text{ن}+۲}}\right)$$

اب ن کو لا انتہا بڑا کرو تو $\frac{\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۳^{\text{ن}}}}{\frac{\text{ط}}{۳^{\text{ن}}}}$ کی انتہا ایک ملتی ہے اور سلسلہ

$$۱ + \frac{۱}{۳^{۲}} + \frac{۱}{۳^{۴}} + \cdots$$

کی انتہا $= \dfrac{۱}{۱ - \dfrac{۱}{۳^{۲}}} = \dfrac{۹}{۸}$ ؛

اس لیے $\text{ط} - \text{جب ط} < \frac{۱}{۶}\,\text{ط}^{۳}$ ، یا $\text{جب ط} > \text{ط} - \frac{۱}{۶}\,\text{ط}^{۳}$

نیز $\text{جم ط} = ۱ - ۲\,\text{جب}^{۲}\,\frac{۱}{۲}\,\text{ط}$

اس لیے $\text{جم ط} < ۱ - ۲\left(\frac{۱}{۲}\text{ط} - \frac{۱}{۴۸}\text{ط}^{۳}\right)^{۲} < ۱ - \frac{۱}{۲}\text{ط}^{۲} + \frac{۱}{۲۴}\text{ط}^{۴}$

پس جب ط، ط اور $\text{ط} - \frac{۱}{۶}\text{ط}^{۳}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے؛ اور جم ط، $۱ - \frac{۱}{۲}\text{ط}^{۲}$ اور $۱ - \frac{۱}{۲}\text{ط}^{۲} + \frac{۱}{۲۴}\text{ط}^{۴}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے جبکہ ط، $\frac{۱}{۲}\pi$ سے کم ہو۔

نیز چونکہ مس ط = جب ط \ جم ط اس لیے

$\text{مس ط} > \left(\text{ط} - \frac{۱}{۶}\text{ط}^{۳}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۲}\text{ط}^{۲}\right)^{-۱} > \left(\text{ط} - \frac{۱}{۶}\text{ط}^{۳}\right)\left(۱ + \frac{۱}{۲}\text{ط}^{۲} + \frac{۱}{۴}\text{ط}^{۴}\right)$

یا $\text{مس ط} > \text{ط} + \frac{۱}{۳}\text{ط}^{۳} + \frac{۱}{۶}\text{ط}^{۵} - \frac{۱}{۲۴}\text{ط}^{۷}$ ، اس لیے $\text{مس ط} > \text{ط} + \frac{۱}{۳}\text{ط}^{۳}$

یولر کا حاصل ضرب

۹۶ — چونکہ $\text{جب ط} = ۲\,\text{جب}\,\frac{۱}{۲}\text{ط}\,\text{جم}\,\frac{۱}{۲}\text{ط}$ ،

$\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۲} = ۲\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۲^{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{۲^{۲}}$ ،

$\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۲^{۲}} = ۲\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۲^{۳}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{۲^{۳}}$

. . . .

$\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۲^{\text{ن}-۱}} = ۲\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۲^{\text{ن}}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{۲^{\text{ن}}}$

اس لیے عمل ضرب سے

$$\text{جب}\ ط = ۲^{ن}\ .\ \text{جم}\ \frac{ط}{۲}\ \text{جم}\ \frac{ط}{۲^۲}\ \text{جم}\ \frac{ط}{۲^۳} \dots \text{جم}\ \frac{ط}{۲^{ن}}\ \text{جب}\ \frac{ط}{۲^{ن}}$$

(128) اب جبکہ ن کو لا انتہا بڑا کیا جاتا ہے تو $۲^{ن}$ جب $\frac{ط}{۲^{ن}}$ کی انتہا ط ہے۔ پس حاصل ضرب

$$\text{جم}\ \frac{ط}{۲}\ \text{جم}\ \frac{ط}{۲^۲}\ \text{جم}\ \frac{ط}{۲^۳} \dots\dots \text{جم}\ \frac{ط}{۲^{ن}}\ ۔$$

کی انتہا جبکہ ن کو لا انتہا بڑا کیا جائے $\frac{\text{جب}\ ط}{ط}$ ہے۔

اس حاصل ضرب میں رکھو ط = $\frac{۱}{۲}\pi$ تو ہمیں π کے لیے ویٹا کا یہ جملہ

$$\frac{۲}{\pi} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}}{۲} \times \dots\dots$$

حاصل ہوتا ہے۔

امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ جیسے ط، صفر سے $\frac{۱}{۲}\pi$ تک بڑھتا ہے $\frac{\text{جب}\ ط}{ط}$ مسلسل گھٹتا ہے اور $\frac{\text{مس}\ ط}{ط}$ مسلسل بڑھتا ہے۔

ہم دکھائینگے کہ $\frac{\text{جب}\ ط}{ط} > \frac{\text{جب}\ (ط + ه)}{ط + ه}$، یعنی

$$(ط + ه)\ \text{جب}\ ط > ط\ (\text{جم}\ ه\ \text{جب}\ ط + \text{جم}\ ط\ \text{جب}\ ه)،\ \text{یا}$$

$$\frac{\text{مس}\ ط}{ط} > \frac{\text{جب}\ ه}{ه + (۱ - \text{جم}\ ه)\ ط}$$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{\text{مس}\ ط}{ط} > ۱ > \frac{\text{جب}\ ه}{ه}$ اور $\frac{\text{جب}\ ه}{ه} > \frac{\text{جب}\ ه}{ه + (۱ - \text{جم}\ ه)\ ط}$

کیونکہ ۱ ـ جم ه مثبت ہے، اور اس لیے نامساوات بالا ثابت ہو چکی، اس طرح $\frac{\text{جب}\ ط}{ط}$

ایک سے $\frac{۲}{\pi}$ تک گھٹتا ہے جیسے ط صفر سے $\frac{۱}{۲}\pi$ تک بڑھتا ہے۔

پھر ہم یہ دکھائینگے کہ

$$\frac{\text{مس}\,(ط + ھ)}{ط + ھ} > \frac{\text{مس}\,ط}{ط} \text{ ، یا}$$

$$ط\ \text{جب}\,(ط + ھ)\,.\,\text{جم}\,ط > (ط + ھ)\ \text{جب}\,ط\ \text{جم}\,(ط + ھ)$$

یعنی $$ط\ \text{جب}\,ھ > ھ\ \text{جب}\,ط\,.\,\text{جم}\,(ط + ھ)$$

یا $$\frac{\text{جب}\,ھ}{ھ} > \frac{\text{جب}\,ط}{ط}\,.\,\text{جم}\,(ط + ھ)\text{؛}$$

اب ہم فرض کر سکتے ہیں $ھ < ط$، پس پہلے مسئلہ کی رو سے

$$\frac{\text{جب}\,ھ}{ھ} > \frac{\text{جب}\,ط}{ط} \text{ ، اور اس لیے } > \frac{\text{جب}\,ط}{ط}\ \text{جم}\,(ط + ھ)$$

اس طرح $\frac{\text{مس}\,ط}{ط}$ ایک سے ∞ تک بڑھتا ہے جیسے ط صفر سے $\frac{۱}{۲}\pi$ تک بڑھتا ہے۔

دفعہ ۳۲ میں دی ہوئی جم ط اور جب ط کی ترسیموں سے یہ نظر آئیگا کہ مسائل بالا درست ہیں؛ چنانچہ پہلی صورت میں وہ نسبت جو معین کو فصلہ کے ساتھ ہے گھٹتی ہے اور دوسری صورت میں بڑھتی ہے جیسے ط صفر سے $\frac{۱}{۲}\pi$ تک بڑھتا ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ مساوات مس لا = لہ لا کی حقیقی اصلوں کی تعداد لا انتہا ہے، نیز بڑی اصلوں کی تقریبی قیمتیں معلوم کرو۔

دفعہ ۳۲ میں تفاعل مس لا کی ترسیم کھینچی گئی ہے؛ اُسی شکل میں تفاعل
لہ لا کی ترسیم کھینچو، یہ ایک خطِ مستقیم ہے جو و میں سے گزرتا ہے - یہ خطِ مستقیم
صریحاً مس لا کی ترسیم کی ہر شاخ کو قطع کریگا، اور لا کی وہ قیمتیں جو نقاطِ تقاطع کے (129)
متناظر ہیں دی ہوئی مساوات کے حل ہیں - اس لیے مساوات کی ایک اصل

$$لا = (۲ک - ۱)\,\frac{\pi}{۲} \text{ اور } (۲ک + ۱)\,\frac{\pi}{۲}$$

کے درمیان ہے جہاں ک کوئی صحیح عدد ہے۔ اگر ک لہ بڑا ہو تو $(\text{۲ک}+\text{۱})\frac{\pi}{\text{۲}}$ صریحاً ایک تقریبی حل ہے؛ اس سے زیادہ نزدیک کا تقرب معلوم کرنا ہو تو فرض کرو $\text{لا} = (\text{۲ک}+\text{۱})\frac{\pi}{\text{۲}} + \text{ما}$ جہاں ما چھوٹا ہے، تب $-\text{مم ما} = \text{لہ ما} + (\text{۲ک}+\text{۱})\frac{\text{لہ}\pi}{\text{۲}}$؛ اب مم ما = ۱، جب ما = ما رکھنے سے اور ما$^{\text{۲}}$ کو نظرانداز کرنے سے

$$-\text{۱} = (\text{۲ک}+\text{۱})\frac{\text{لہ}\pi}{\text{۲}}\,\text{ما}،\ \text{یا ما} = -\frac{\text{۲}}{(\text{۲ک}+\text{۱})\,\text{لہ}\,\pi}،\ \text{اس لیے لا} = (\text{۲ک}+\text{۱})\frac{\pi}{\text{۲}} - \frac{\text{۲}}{(\text{۲ک}+\text{۱})\,\text{لہ}\,\pi}$$

تقریبی حل ہے۔ اس سے بھی زیادہ تقریبی حل معلوم کرنے کے لیے ما$^{\text{۳}}$ نظرانداز کرو تو اُن رقموں میں جن میں ما$^{\text{۲}}$ شامل ہے $\text{ما} = -\frac{\text{۲}}{(\text{۲ک}+\text{۱})\,\text{لہ}\,\pi}$ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ما}^{\text{۲}} - \text{۱} = \left\{\text{لہ ما} + (\text{۲ک}+\text{۱})\frac{\text{لہ}\pi}{\text{۲}}\right\}\text{ما} = \text{لہ ما}^{\text{۲}} + \text{ما}(\text{۲ک}+\text{۱})\frac{\text{لہ}\pi}{\text{۲}}،$$

اس لیے

$$\text{ما}(\text{۲ک}+\text{۱})\frac{\text{لہ}\pi}{\text{۲}} = -\text{۱} + \left(\frac{\text{۱}}{\text{۲}} - \text{لہ}\right)\frac{\text{۴}}{(\text{۲ک}+\text{۱})^{\text{۲}}\,\text{لہ}^{\text{۲}}\,\pi^{\text{۲}}}$$

یا

$$\text{ما} = -\frac{\text{۲}}{(\text{۲ک}+\text{۱})\,\text{لہ}\,\pi} + \left(\frac{\text{۱}}{\text{۲}} - \text{لہ}\right)\frac{\text{۸}}{(\text{۲ک}+\text{۱})^{\text{۳}}\,\text{لہ}^{\text{۳}}\,\pi^{\text{۳}}}$$

اس لیے لا کی تقریبی قیمت ہے

$$\text{لا} = (\text{۲ک}+\text{۱})\frac{\pi}{\text{۲}} - \frac{\text{۲}}{(\text{۲ک}+\text{۱})\,\text{لہ}\,\pi} + \left(\frac{\text{۱}}{\text{۲}} - \text{لہ}\right)\frac{\text{۸}}{(\text{۲ک}+\text{۱})^{\text{۳}}\,\text{لہ}^{\text{۳}}\,\pi^{\text{۳}}}$$

(۳) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{۱}}{\text{ط}} = \text{مم ط} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{مس}\frac{\text{ط}}{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\text{مس}\frac{\text{ط}}{\text{۴}} + \frac{\text{۱}}{\text{۸}}\text{مس}\frac{\text{ط}}{\text{۸}} + \dots\ \infty\ \text{تک}$$

یہ آسانی کے ساتھ دکھایا جا سکتا ہے کہ

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{مم}\frac{\text{ط}}{\text{۲}} - \text{مم ط} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{مس}\frac{\text{ط}}{\text{۲}}،$$

اس لیے نیز $\frac{1}{4}\,\text{مم}\,\frac{\text{ط}}{4} - \frac{1}{2}\,\text{مم}\,\frac{\text{ط}}{2} = \frac{1}{4}\,\text{مس}\,\frac{\text{ط}}{4}$،

. . . .

$$\frac{1}{2^{\text{ن}}}\,\text{مم}\,\frac{\text{ط}}{2^{\text{ن}}} - \frac{1}{2^{\text{ن}-1}}\,\text{مم}\,\frac{\text{ط}}{2^{\text{ن}-1}} = \frac{1}{2^{\text{ن}}}\,\text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2^{\text{ن}}}$$

اس لیے عمل جمع سے

$$\frac{1}{2}\,\text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2} + \frac{1}{2^2}\,\text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{\text{ن}}}\,\text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2^{\text{ن}}} = \frac{1}{2^{\text{ن}}}\,\text{مم}\,\frac{\text{ط}}{2^{\text{ن}}} - \text{مم ط}$$

اب اگر ن کو لاانتہا بڑھا دیا جائے تو $\frac{1}{2^{\text{ن}}}\,\text{مم}\,\frac{\text{ط}}{2^{\text{ن}}}$ کی انتہائی قیمت $\frac{1}{\text{ط}}$ ہے، اس لیے سلسلہ کا انتہائی مجموعہ $\frac{1}{\text{ط}} - \text{مم ط}$ ہے۔

اگر ہم رکھیں $\text{ط} = \frac{1}{2}\pi$ تو حسب ذیل سلسلہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4}\,\text{مس}\,\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}\,\text{مس}\,\frac{\pi}{8} + \frac{1}{16}\,\text{مس}\,\frac{\pi}{16} + \cdots$$

(130)

بعض جملوں کی انتہائیں

۹۷ ـــــ اگر ن کو لاانتہا بڑھا دیا جائے تو $\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$، $\frac{\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}$ میں سے ہر ایک کی انتہا ایک ہے؛ اس لیے $\left(\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right)^{\text{ر}}$، $\left(\frac{\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ر}}$ میں سے ہر ایک کی انتہا بھی ایک ہے بشرطیکہ ر کوئی عدد ہو جو ن کے تابع نہیں ہے؛ لیکن اگر ر، ن کا تفاعل ف (ن) ہو جو ن کے لامتناہی ہونے پر لامتناہی ہو جاتا ہے تو جملے $\left(\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right)^{\text{ف(ن)}}$، $\left(\frac{\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ف(ن)}}$ جماعت 1^{∞} سے متعلق غیر معین شکلیں ہیں اور ان کی

انتہاؤں کی قیمتیں ف (ن) کی شکل پر منحصر ہیں ۔

$\left(\text{جم}\ \frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right)^{\text{ف(ن)}}$ کی انتہائی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے اس جملہ کو ء سے تعبیر کرو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{لوک}_{\text{و}}\ \text{ء} = \frac{1}{2}\ \text{ف (ن)}\ \text{لوک}_{\text{و}}\left(1 - \text{جب}^2 \frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right)$$

اب ہم اس مسئلہ کو معلوم مسئلہ کے طور پر مان لینگے کہ اگر لا کو لا انتہا گھٹا دیا جائے تو

$$\text{نہا}\ \frac{\text{لوک}_{\text{و}}(1 - \text{لا})}{\text{لا}} = -1$$

تب چونکہ

$$\text{لوک}_{\text{و}}\ \text{ء} = \frac{1}{2}\ \text{ف (ن)}\ \text{جب}^2 \frac{\text{ط}}{\text{ن}}\ \frac{\text{لوک}_{\text{و}}\left(1 - \text{جب}^2 \frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right)}{\text{جب}^2 \frac{\text{ط}}{\text{ن}}}$$

اس لیے لوک$_{\text{و}}$ ء کی انتہا $\frac{1}{2}$ ف (ن) جب$^2 \frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کی انتہا کے مساوی ہے مگر مختلف علامت کے ساتھ بشرطیکہ یہ موخر الذکر انتہا موجود ہو ۔ ہم حسب ذیل صورتوں میں لوک$_{\text{و}}$ ء کی انتہا اور اس لیے ء کی انتہا معلوم کر سکتے ہیں :۔

(۱) اگر ف (ن) = ن تو اس صورت میں ف (ن) جب$^2 \frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ = ن جب $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ جب $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ اور ن جب $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کی انتہا ط ہے اور جب $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کی صفر ہے ؛ اس لیے لوک$_{\text{و}}$ ء کی انتہا صفر ہے اور اس لیے ء کی انتہا ایک ہے ۔

(۲) اگر ف (ن) = ن^2 تو اس صورت میں ف (ن) جب$^2 \frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ (181)
= (ن جب $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$)^2 جس کی انتہا ط^2 ہے ۔ اس لیے لوک$_{\text{و}}$ ء کی انتہا $-\frac{1}{2}$ ط^2 ہے اور ء کی $\text{و}^{-\frac{1}{2}\text{ط}^2}$ ۔

(۳) اگر $\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^{\text{ف}}$ جہاں $\text{ف} > 2$ تو اس صورت میں
$\text{ف}(\text{ن}) \text{ جب}^2 \frac{\text{ط}}{\text{ن}} = \text{ن}^{\text{ف}-2}\left(\text{ن جب} \frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right)^2$ اور یہ لا انتہا بڑھتا ہے جبکہ ن لا انتہا بڑھتا ہے۔ اس لیے $\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ع}$ کی انتہا ∞ ہے اور اس لیے ع کی انتہا صفر ہے۔

۹۸ — $\left(\frac{\text{جب} \frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہائی قیمت معلوم کرنے کے لیے

چونکہ $\frac{\text{جب} \frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}$ ایک سے کم ہے اور $\frac{\text{جب} \frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\text{مس} \frac{\text{ط}}{\text{ن}}}$ (یا جم ط) سے بڑا ہے

اس لیے $\left(\frac{\text{جب} \frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہا، $1^{\text{ن}}$ یا ۱ اور $\left(\text{جم} \frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کے درمیان واقع ہے؛ اس طرح دفعہ ماسبق کی صورت (۱) سے $\left(\frac{\text{جب} \frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہا ایک ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ $\left(\frac{\text{جب} \frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}^2}$ اور $\left(\frac{\text{جب} \frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}^{\text{ف}}}$

(ف > ۲) کی انتہائی قیمتیں علی الترتیب ۱ اور $\text{قو}^{-\frac{1}{2}\text{ط}^2}$ کے درمیان، اور ایک اور صفر کے درمیان واقع ہیں۔

زاویہ کی جیب اور جیب التمام کے لیے سلسلے اس کے دائری ناپ کی قوتوں میں

۹۹ — چوتھے باب کے ضابطوں (۳۹)، (۴۰) میں ا کی بجائے ط لکھو

اور فرض کرو لا = ن ط تو

$$\text{جب لا} = \text{ن جم}^{\text{ن}-۱}\text{ط جب ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{\underline{|۳}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۳}\text{ط جب}^{۳}\text{ط} + \dots$$

$$+(-۱)^{\text{ر}}\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)\dots(\text{ن}-۲\text{ر})}{\underline{|۲\text{ر}+۱}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۲\text{ر}-۱}\text{ط جب}^{۲\text{ر}+۱}\text{ط} + \dots،$$

$$\text{جم لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\text{ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\underline{|۲}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۲}\text{ط جب}^{۲}\text{ط} + \dots$$

$$+(-۱)^{\text{س}}\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)\dots(\text{ن}-۲\text{س}+۱)}{\underline{|۲\text{س}}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۲\text{س}}\text{ط جب}^{۲\text{س}}\text{ط} + \dots \qquad (182)$$

ان سلسلوں کو حسب ذیل شکلوں میں لکھا جا سکتا ہے :-

$$\text{جب لا} = \text{لا جم}^{\text{ن}-۱}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right) - \frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط})(\text{لا}-۲\text{ط})}{\underline{|۳}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۳}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{۳} + \dots$$

$$+(-۱)^{\text{ر}}\frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط})\dots(\text{لا}-۲\text{ر ط})}{\underline{|۲\text{ر}+۱}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۲\text{ر}-۱}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{۲\text{ر}+۱} + \dots$$

$$\text{جم لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\text{ط} - \frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط})}{\underline{|۲}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۲}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{۲} + \dots$$

$$+(-۱)^{\text{س}}\frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط})\dots(\text{لا}-\overline{۲\text{س}-۱}\,\text{ط})}{\underline{|۲\text{س}}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۲\text{س}}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{۲\text{س}} + \dots$$

ان میں سے ہر سلسلہ میں رقموں کی تعداد ن پر منحصر ہوتی ہے اور جیسے ن لا انتہا بڑھتا ہے رقموں کی تعداد لا انتہا بڑھتی ہے۔ پس اس غرض کے لیے کہ جملوں کی انتہائیں حاصل ہوں جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے یہ ضروری ہے کہ ان میں سے ہر سلسلہ کی بجائے ایک ایسا

سلسلہ رکھا جائے جس میں رقموں کی تعداد مستقل ہو اور ن کے ساتھ لا انتہا نہ بڑھے۔

جب لا کے لیے جو سلسلہ ہے اُس کی (ر + ۲) ویں رقم کو (ر + ۱) ویں رقم کے ساتھ جو نسبت ہے وہ ہے

$$-\frac{(\text{لا}-\overline{\text{۲ر}+\text{۱}}\,\text{ط})(\text{لا}-\overline{\text{۲ر}+\text{۲}}\,\text{ط})}{(\text{۲ر}+\text{۲})(\text{۲ر}+\text{۳})}\times\left(\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}\right)^{\text{۲}};$$

یہ عدد منفی ہے اور

$$\left[\frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{(\text{۲ر}+\text{۲})(\text{۲ر}+\text{۳})}+\left(\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{۲}}+\frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{ن}}\times\frac{\text{۱}}{\text{ر}+\text{۱}}\right\}\left(\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}\right)^{\text{۲}}$$

سے عدداً کم ہے۔

اگر لا کی کوئی مستقل قیمت ہو تو $\left(\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}\right)^{\text{۲}}$ گھٹتا ہے جیسے ن بڑھتا ہے؛ ن اور ر کی قیمتیں $\text{ن}_{\text{۱}}$، $\text{ر}_{\text{۱}}$ منتخب کی جا سکتی ہیں ایسی کہ جملہ بالا کی قیمتیں $\text{ن} \geqslant \text{ن}_{\text{۱}}$ اور $\text{ر} \geqslant \text{ر}_{\text{۱}}$ کے لیے ایک سے چھوٹی حاصل ہوں۔ پس لا کی اس مستقل قیمت کے لیے اور ن کی اُن تمام قیمتوں کے لیے جو $\text{ن}_{\text{۱}}$ سے بڑی یا اس کے مساوی ہیں جب لا کا سلسلہ ایسا ہے کہ ایک ثابت رقم (جس کا محل ن پر منحصر نہیں ہے) سے اور اس کے بعد ہر رقم اپنی ماقبل رقم سے عدداً چھوٹی ہے۔ اب چونکہ ایک ایسے سلسلہ کا مجموعہ جس کی ارقام متبادلاً مثبت منفی ہوں اور ہر رقم اپنی ماقبل رقم سے عدداً چھوٹی ہو پہلی رقم سے چھوٹا ہوتا ہے اس لیے

$$\text{جب لا}=\text{لا}\,\text{جم}^{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)-\frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط})\cdots(\text{لا}-\text{۲ط})}{\lfloor\text{۳}}\,\text{جم}^{\text{ن}-\text{۳}}\,\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{\text{۳}}$$

$$+\cdots+(-\text{۱})^{\text{ر}}\,\text{صہ}\,\frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط})\cdots(\text{لا}-\text{۲رط})}{\lfloor\text{۲ر}+\text{۱}}\,\text{جم}^{\text{ن}-\text{۲ر}-\text{۱}}\,\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{\text{۲ر}+\text{۱}}$$

جہاں $\text{ط}=\frac{\text{لا}}{\text{ن}}$. بشرطیکہ $\text{ن}\geqslant\text{ن}_{\text{۱}}$، ر، ن پر منحصر نہیں ہے اور صہ

صفر اور ا کے درمیان ایک عدد ہے - صحیح عدد ر کی کوئی قیمت ہو سکتی ہے جو ر سے کم نہ ہو - (183)

اسی طرح، ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جم لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{ط} - \frac{\text{لا (لا - ط)}}{\lfloor\underline{\text{۲}}}\,\text{جم}^{\text{ن-۲}}\,\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{\text{۲}}$$

$$+ \frac{\text{لا (لا - ط) (لا - ۲ط) (لا - ۳ط)}}{\lfloor\underline{\text{۴}}}\,\text{جم}^{\text{ن-۴}}\,\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{\text{۴}} - \cdots\cdots$$

$$+ (-\text{۱})^{\text{س}}\,\text{صَہ}\,\frac{\text{لا (لا - ط)} \ldots \text{(لا - }\overline{\text{۲س - ۱}}\,\text{ط)}}{\lfloor\underline{\text{۲س}}}\,\text{جم}^{\text{ن-۲س}}\,\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{\text{۲س}}$$

بشرطیکہ ن بے نَ، س؛ ن پر منحصر نہیں ہے اور صَہ، صفر اور ایک کے درمیان ایک عدد ہے -

اب فرض کرو کہ ن لا انتہا بڑھا دیا گیا ہے تو جب لا اور جم لا کے لیے جو جملے ہیں ان کی انتہائیں اِن تفاعلوں کو تعبیر کرنی چاہیں - اب چونکہ ہر سلسلہ میں رقموں کی تعداد مستقل ہے اور ن کے تابع نہیں اس لیے ہمیں صرف مختلف رقموں کی انتہاؤں کو جمع کرنا ہوگا تاکہ مجموعہ کی انتہا معلوم ہو سکے - $\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{\text{ک}}$ کی انتہا جبکہ ک ن پر منحصر نہیں ہے ایک ہے - نیز $\text{جم}^{\text{ن - ک}}$ ط کی انتہا = $\frac{\text{جم}^{\text{ن}}\ \text{ط کی انتہا}}{\text{جم}^{\text{ک}}\ \text{ط کی انتہا}}$

اور دفعہ ۹۷ میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ لوک $\text{جم}^{\text{ن}}$ ط = ۱، اور چونکہ لوک جم ط = ۱ اس لیے لوک $\text{جم}^{\text{ک}}$ ط = ۱ حاصل ہوتا ہے؛ اس لیے لوک $\text{جم}^{\text{ن - ک}}$ ط = ۱؛ اعداد صہ اور صَہ، ن پر منحصر ہیں لیکن ن کی ہر قیمت کے لیے وہ صفر اور ایک کے درمیان ہیں اور اس لیے ان کی انتہائیں صہ اور صَہُ ایک سے تجاوز نہیں کر سکتیں - پس ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{\underline{|۳}} + \frac{\text{لا}^{۵}}{\underline{|۵}} - \cdots + (-۱)^{\text{ر}}\,\text{صہ}\,\frac{\text{لا}^{۲\text{ر}+۱}}{\underline{|۲\text{ر}+۱}} \text{ ،}$$

$$\text{جم لا} = ۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{|۲}} + \frac{\text{لا}^{۴}}{\underline{|۴}} - \cdots + (-۱)^{\text{س}}\,\text{صہ}'\,\frac{\text{لا}^{۲\text{س}}}{\underline{|۲\text{س}}}$$

جہاں صہ اور صہ' ثبت عدد ہیں جو ایک سے تجاوز نہیں کرسکتے ۔
یہ نتیجے درست رہتے ہیں لا کی ہر قیمت کے لیے اور ر اور س کی تمام قیمتوں کے لیے جو ثابت صحیح اعداد $\text{ر}_۱$ اور $\text{س}_۱$ سے بڑے یا ان کے مساوی ہوں ۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ لا کی ہر قیمت کے لیے جب لا حسب ذیل مستدق سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے

$$\text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{\underline{|۳}} + \frac{\text{لا}^{۵}}{\underline{|۵}} - \cdots + (-۱)^{\text{م}}\frac{\text{لا}^{۲\text{م}+۱}}{\underline{|۲\text{م}+۱}} + \cdots$$

اور جم لا حسب ذیل مستدق سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے

$$۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{|۲}} + \frac{\text{لا}^{۴}}{\underline{|۴}} - \cdots + (-۱)^{\text{م}}\frac{\text{لا}^{۲\text{م}}}{\underline{|۲\text{م}}} + \cdots$$

کیونکہ پہلے سلسلہ کی رقموں کی ایک مقررہ تعداد کا مجموعہ، جب لا سے
(134) بقدر $\frac{\text{لا}^{۲\text{ر}+۱}}{\underline{|۲\text{ر}+۱}}$ سے زیادہ فرق نہیں رکھتا جو لا کی ہر قیمت کے لیے اتنا چھوٹا ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں اگر ر کو کافی بڑا لیا جائے ۔
یہ واقعہ اس امر کے مشاہدہ کرنے سے واضح ہے کہ نسبت $\frac{\text{لا}^{۲}}{۲\text{ر}(۲\text{ر}+۱)}$
$\times\ \frac{\text{لا}^{۲\text{ر}+۱}}{\underline{|۲\text{ر}+۱}} : \frac{\text{لا}^{۲\text{ر}-۱}}{\underline{|۲\text{ر}-۱}}$ ، لا کی کسی مقررہ قیمت کے لیے ر کو کافی بڑا لینے سے اِتنی چھوٹی بنائی جا سکتی ہے جتنی ہم چاہیں ۔

اسی طرح کا استدلال جم لا کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔

مثالیں

(۱) جم^3 لا کو لا کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

$\text{جم}^3\,\text{لا} = \frac{1}{4}(\text{جم}\,3\,\text{لا} + 3\,\text{جم}\,\text{لا})$؛ اس لیے جم ۳ لا، جم لا کو لا کی قوتوں میں پھیلانے سے ہمیں جم^3 لا کے پھیلاؤ میں عام رقم حاصل ہوتی ہے

$$(-1)^{\text{ن}}\,\frac{3^{2\text{ن}} + 3}{4\,\lfloor 2\text{ن}}\,\text{لا}^{2\text{ن}}$$

یہ معلوم ہوگا کہ جم لا یا جب لا کی کسی صحیح عددی قوت کو یا ایسی قوتوں کے حاصل ضرب کو لا کی قوتوں میں پھیلایا جا سکتا ہے اگر ہم اس جملہ کو لا کے ضعفوں کی جیوب یا جیوب التمام کی رقوم میں بیان کریں۔

(۲) مس لا کو لا کی قوتوں میں اُس رقم تک پھیلاؤ جس میں لا^7 شامل ہے۔

$$\text{مس}\,\text{لا} = \text{جب}\,\text{لا} \,\big/\, \text{جم}\,\text{لا}$$

$$= \left\{\text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{6} + \frac{\text{لا}^5}{120} - \frac{\text{لا}^7}{5040}\right\}\left\{1 - \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^4}{24} - \frac{\text{لا}^6}{720}\right\}^{-1}$$

لا^7 سے اعلیٰ رتبہ کی رقموں کو خارج کر دینے سے۔ دوسرے جزو ضربی کو پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس}\,\text{لا} = \left\{\text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{6} + \frac{\text{لا}^5}{120} - \frac{\text{لا}^7}{5040}\right\}\left\{1 + \left(\frac{\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{لا}^4}{24} + \frac{\text{لا}^6}{720}\right) + \left(\frac{\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{لا}^4}{24}\right)^2 + \left(\frac{\text{لا}^2}{2}\right)^3\right\}$$

ضرب دینے اور لا^7 تک کی رقموں کے سروں کو اکٹھا کرنے سے

$$\text{مس}\,\text{لا} = \text{لا} + \frac{1}{3}\,\text{لا}^3 + \frac{2}{15}\,\text{لا}^5 + \frac{17}{315}\,\text{لا}^7$$

(۳) $\dfrac{\text{جب (مس لا) - مس (جب لا)}}{\text{لا}^{7}}$ کی انتہا معلوم کرو جبکہ لا = ۰

اس جملہ کا شمار کنندہ جبکہ مثال ماسبق کا پھیلاؤ استعمال کیا جائے

$$= \text{مس لا} - \tfrac{1}{6}\,\text{مس}^{3}\,\text{لا} + \tfrac{1}{120}\,\text{مس}^{5}\,\text{لا} - \tfrac{1}{5040}\,\text{مس}^{7}\,\text{لا} - \text{جب لا} - \tfrac{1}{3}\,\text{جب}^{3}\,\text{لا} - \tfrac{2}{15}\,\text{جب}^{5}\,\text{لا} - \tfrac{17}{315}\,\text{جب}^{7}\,\text{لا}$$

اور یہ، لا^{7} سے اعلیٰ رتبہ کی رقموں کو خارج کر دینے سے

$$= \left(\text{لا} + \tfrac{1}{3}\text{لا}^{3} + \tfrac{2}{15}\text{لا}^{5} + \tfrac{17}{315}\text{لا}^{7}\right) - \tfrac{1}{6}\text{لا}^{3}\left(1 + \text{لا}^{2} + \tfrac{11}{15}\text{لا}^{4}\right) + \tfrac{\text{لا}^{5}}{120}\left(1 + \tfrac{5}{3}\text{لا}^{2}\right)$$

$$- \tfrac{\text{لا}^{7}}{5040} - \left(\text{لا} - \tfrac{1}{6}\text{لا}^{3} + \tfrac{\text{لا}^{5}}{120} - \tfrac{\text{لا}^{7}}{5040}\right) - \tfrac{\text{لا}^{3}}{3}\left(1 - \tfrac{\text{لا}^{2}}{2} + \tfrac{\text{لا}^{4}}{40} + \tfrac{\text{لا}^{4}}{12}\right)$$

$$- \tfrac{2}{15}\left(1 - \tfrac{5}{6}\text{لا}^{2}\right) - \tfrac{17}{315}\,\text{لا}^{7}$$

یہ جملہ $-\tfrac{1}{30}\,\text{لا}^{7}$ میں تحویل ہو جاتا ہے ۔ اس لیے دیئے ہوئے جملہ کی انتہا $-\tfrac{1}{30}$ ہے

(135) مثلثی اور جبری متماثلات کے درمیان ایک رشتہ

۱۰۰ ـــــ کسی مثلثی متماثلہ سے جس میں زاویے حرفوں کے متجانس تفاعل ہوں جبری متماثلات کا ایک سلسلہ اخذ کیا جا سکتا ہے اس طور پر کہ دائری تفاعلوں کو زاویوں کے دائری ناپ کی قوتوں میں پھیلایا جائے اور ایک ہی رتبہ کی رقموں کو مساوی رکھا جائے ۔ مثلاً ضابطہ $\text{جب ا جب ب} = \tfrac{1}{2}\{\text{جم (ا - ب) - جم (ا + ب)}\}$ میں جیوب اور جیوب التمام میں سے ہر ایک کو پھیلاؤ اور دوسرے رتبہ کی رقموں کو مساوی رکھو تو

$$\text{ا ب} = \tfrac{1}{4}\left\{(\text{ا + ب})^{2} - (\text{ا - ب})^{2}\right\}$$

چوتھے باب کے دفعات ۴۲ اور ۴۷ میں ہم نے متعدد مثالیں متماثل مثلثی اور جبری متماثلات کی دی ہیں، ہر صورت میں مثلثی متماثلہ سے جبری متماثلہ حاصل ہوتی ہے اگر متذکرہ بالا طریقہ کو کام میں لایا جائے۔ مثلاً دفعہ ۴۷ کی مثال (۱۱) پر غور کرو، اس کو لکھا جا سکتا ہے

∑ جب² ا جب (ب + ج - ا) - ۲ جب ا جب ب جب ج

= جب (ب + ج - ا) جب (ج + ا - ب) جب (ا + ب - ج)

اگر ہم جیوب کو پھیلانے کے بعد تیسرے رتبہ کی رقموں کو مساوی رکھیں تو ہمیں حسب ذیل متماثل جبری متماثلہ مساوات حاصل ہوتی ہے

∑ ا² (ب + ج - ا) - ۲ ا ب ج = (ب + ج - ا) (ج + ا - ب) (ا + ب - ج)

آٹھویں باب پر مثالیں

۱۔ ہندسی طور پر ثابت کرو کہ

مس ط ≥ ۲ مس ½ ط، جہاں ط < ½ π

۲۔ مس ۳ ط مم³ ط کی قیمت میں جو تبدیلیاں ہوتی ہیں جبکہ ط صفر سے ½ π تک بڑھتا ہے ان کو مرتسم کرو۔

ثابت کرو کہ اس جملہ کی اقل قیمت ۷ا - ۱۲ √۲ ہے اور اعظم قیمت ۷ا + ۱۲ √۲ ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ مس ۳ ط مم ط، ۳ اور ⅓ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتا۔

۴۔ ثابت کرو کہ ط > ۳ جب ط / (۲ + جم ط)، جہاں ط < ½ π

۵۔ ثابت کرو کہ ۳ مس ۵ ط > ۵ مس ۳ ط، اگر ط، صفر اور π/۱۰ کے درمیان واقع ہو۔

۶۔ ثابت کرو کہ 1/(جب² ط) - 1/(ط²) کی انتہائی قیمت (جبکہ ط = ۰) ⅓ ہے۔

(136) ۷ - ثابت کرو کہ جب (جم ط) < جم (جب ط)، ط کی تمام قیمتوں کے لیے -

۸ - ثابت کرو کہ لامتناہی حاصل ضرب

$$\left(\text{۱} - \text{مس}^{\text{۲}} \frac{\text{ط}}{\text{۲}}\right)\left(\text{۱} - \text{مس}^{\text{۲}} \frac{\text{ط}}{\text{۲}^{\text{۲}}}\right)\left(\text{۱} - \text{مس}^{\text{۲}} \frac{\text{ط}}{\text{۲}^{\text{۳}}}\right) \cdots\cdots$$

کی انتہائی قیمت $\frac{\text{ط}}{\text{مس ط}}$ ہے -

۹ - اگر $\frac{\text{جب (ط - فہ)}}{\text{جب فہ}} = \text{۱} + \text{ن}$ اور ن بہت چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب فہ} = \left(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ن}\right) \text{جب} \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ط}$$ ، تقریباً

۱۰ - $\frac{\text{جب (ط جم ط)}}{\text{جم (ط جب ط)}}$ کی انتہائی قیمت معلوم کرو جبکہ $\text{ط} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\pi$

۱۱ - $\frac{\text{مس ۲ ط} - \text{۲ مس ط}}{\text{ط}^{\text{۳}}}$ کی انتہائی قیمت معلوم کرو جبکہ ط = ۰

۱۲ - ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{\text{مم ط}}{\sqrt{\text{۲} - \text{۲ جب ط}}}\right)^{\text{مس}^{\text{۲}}\left(\frac{\text{۱}}{\text{۴}}\pi + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ط}\right)}$$

کی انتہائی قیمت $\text{قو}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}$ ہے جبکہ $\text{ط} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\pi$

۱۳ - ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}\right)^{\text{۲}} = \text{۱} - \text{جب}^{\text{۲}}\frac{\text{لا}}{\text{۲}} - \text{جم}^{\text{۲}}\frac{\text{لا}}{\text{۲}}\,\text{جب}^{\text{۲}}\frac{\text{لا}}{\text{۴}} - \text{جم}^{\text{۲}}\frac{\text{لا}}{\text{۲}}\,\text{جم}^{\text{۲}}\frac{\text{لا}}{\text{۴}}\,\text{جب}^{\text{۲}}\frac{\text{لا}}{\text{۸}} - \cdots$$

۱۴ - اگر مساوات $\text{مس ط} = \frac{\text{۱}}{\text{مم عہ}_{\text{۱}} + \text{مم عہ}_{\text{۲}}} + \frac{\text{۱}}{\text{مم عہ}_{\text{۳}} + \text{مم عہ}_{\text{۴}}}$

میں $\text{عہ}_{\text{۱}}$، $\text{عہ}_{\text{۲}}$، $\text{عہ}_{\text{۳}}$، $\text{عہ}_{\text{۴}}$ سب زاویے تقریباً مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ط

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\left(\text{عہ}_{\text{۱}} + \text{عہ}_{\text{۲}} + \text{عہ}_{\text{۳}} + \text{عہ}_{\text{۴}}\right)$$

کے تقریباً مساوی ہے ۔

۱۵ ۔ سلسلہ ذیل جمع کرو ۔

$$\text{جم}\,\frac{ط}{۲} + ۲\,\text{جم}\,\frac{ط}{۲}\,\text{جم}\,\frac{ط}{۲^۲} + ۲^۲\,\text{جم}\,\frac{ط}{۲}\,\text{جم}\,\frac{ط}{۲}\,\text{جم}\,\frac{ط}{۲^۳} + \ldots$$ ن رقموں تک

۱۶ ۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\text{مس}\,\frac{لا}{۲}\,\text{قط}\,لا + \text{مس}\,\frac{لا}{۲^۲}\,\text{قط}\,\frac{لا}{۲} + \text{مس}\,\frac{لا}{۲^۳}\,\text{قط}\,\frac{لا}{۲^۲} + \ldots \infty$$ تک

کا حاصل جمع مس لا ہے ۔

۱۷ ۔ ثابت کرو کہ

$$ط - \text{جب}\,ط\,\text{جم}\,ط = ۲\,\text{جب}\,ط\,\text{جب}^۲\frac{ط}{۲} + ۲^۲\,\text{جب}\,\frac{ط}{۲}\,\text{جب}^۲\frac{ط}{۲^۲}$$
$$+ ۲^۳\,\text{جب}\,\frac{ط}{۲^۲}\,\text{جب}\,\frac{ط}{۲^۳} + \ldots \infty$$ تک

۱۸ ۔ ثابت کرو کہ
$$\text{مس}\,ط = \cfrac{۲}{\text{مم}\,\frac{ط}{۲} - \cfrac{۲}{\text{مم}\,\frac{ط}{۴} - \cfrac{۲}{\text{مم}\,\frac{ط}{۸} - \ldots}}}$$

۱۹ ۔ اگر $ط < \pi$ تو ثابت کرو کہ

$$۲\left[\text{جب}\,\frac{ط}{۲} + \text{جب}\,\frac{ط}{۲^۲} + \ldots + \text{جب}\,\frac{ط}{۲^ن}\right]\left[\text{جم}\,\frac{ط}{۲} + \text{جم}\,\frac{ط}{۲^۲} + \ldots + \text{جم}\,\frac{ط}{۲^ن}\right]$$
$$\not> \left[\text{جب}\,ط \times \text{جب}\,\frac{ط}{۲} \times \ldots \times \text{جب}\,\frac{ط}{۲^{ن-۱}}\right]^{\frac{۱}{ن}}$$

۲۰ ۔ اگر ا اور ب ثبت مقداریں ہوں اور اگر $ا_۱ = \frac{۱}{۲}(ا + ب)$، $ب_۱ = (ا_۱ ب)^{\frac{۱}{۲}}$ (137)

$ا_۲ = \frac{۱}{۲}(ا_۱ + ب_۱)$، $ب_۲ = (ا_۲ ب_۱)^{\frac{۱}{۲}}$ اور علیٰ ہذا تو ثابت کرو کہ

$$ا_\infty = ب_\infty = \frac{(ب^۲ - ا^۲)^{\frac{۱}{۲}}}{\text{جم}^{-۱}\,\frac{ا}{ب}}$$

بتاؤ کہ کس طرح π کی قیمت اس ضابطہ کے ذریعہ محسوب کی جاسکتی ہے۔

۲۱۔ لاتناہی حاصل ضرب

$$\left(\text{جب ط جم } \tfrac{1}{2}\text{ ط}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\text{جب } \tfrac{1}{2}\text{ ط جم } \tfrac{1}{4}\text{ ط}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\text{جب } \tfrac{1}{4}\text{ ط جم } \tfrac{1}{8}\text{ ط}\right)^{\frac{1}{8}}\cdots$$

کی انتہائی قیمت معلوم کرو۔

۲۲۔ اگر مس ط = ۴ ط تو ط کی قیمت صفر اور $\frac{1}{2}\pi$ کے درمیان یہ ہوگی

$$\frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{11}{24\pi^3} + \frac{403}{480\pi^5} + \cdots\cdots\right)$$

۲۳۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب ط}}{1 + 2\text{ جم ط}} = \sum^{\infty}\left\{\frac{1}{2^{\text{ن}}} \times \frac{\text{جب } \frac{\text{ط}}{2^{\text{ن}}}}{2\text{ جم } \frac{\text{ط}}{2^{\text{ن}}} - 1}\right\}$$

۲۴۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{2\text{ جم } 2^{\text{ن}}\text{ ط} + 1}{2\text{ جم ط} + 1} = (2\text{ جم ط} - 1)(2\text{ جم } 2\text{ ط} - 1)\cdots\cdot(2\text{ جم } 2^{\text{ن}-1}\text{ ط} - 1)$$

۲۵۔ ن رقموں تک جمع کرو سلسلہ

$$\frac{1}{2}\text{ لوگ مس } 2\text{ ط} + \frac{1}{2^2}\text{ لوگ مس } 2^2\text{ ط} + \frac{1}{2^3}\text{ لوگ مس } 2^3\text{ ط} + \cdots\cdot$$

۲۶۔ اگر یہ دیا جائے کہ $\frac{\text{ط}^{\text{ن}}\text{ جب}^{\text{ن}}\text{ ط}}{\text{ط}^{\text{ن}} - \text{جب}^{\text{ن}}\text{ ط}}$ کی انتہائی قیمت جبکہ ط = ۰ نہ صفر ہے نہ لاتناہی تو ن معلوم کرو۔

۲۷۔
$$\frac{1 - \text{جم } 2\text{ لا} + \text{جم } 4\text{ لا} - \text{جم } 6\text{ لا} + \text{جم } 8\text{ لا} - \text{جم } 10\text{ لا} - \text{جم } 14\text{ لا} + \text{جم } 16\text{ لا}}{3 - 4\text{ جم } 2\text{ لا} + \text{جم } 4\text{ لا}}$$

کی انتہائی قیمت معلوم کرو جبکہ لا = ۰۔

۲۸ - ثابت کرو کہ اُس لاتنناہی سلسلہ کا مجموعہ جس کی رویں رقم

$$(-1)^{\text{ر}-1} \times \frac{\text{ر}}{2\text{ر}-1} \times \frac{1}{\lfloor 2\text{ر}-2}$$

ہے $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جب $(\frac{1}{4}\pi + 1)$ ہے ۔

۲۹ - اگر صہ بہت چھوٹا ہو اور فہ = ط - ۲ صہ جب ط + $\frac{3}{4}$ صہ^2 جب ۲ ط تو ثابت کرو کہ
ط = فہ + ۲ صہ جب فہ + $\frac{5}{4}$ صہ^2 جب ۲ فہ، تقریباً

۳۰ - اگر ما = ی + ک جب (ی + ک ما) تو ی کو چھوٹی مقدار ک کی قوتوں میں اُس رقم تک پھیلاؤ جس میں ک^3 شامل ہے ۔

۳۱ - مثلثی متماثلہ
جب (د - ب) جب (ا - ج) + جب (ب - ج) جب (ا - د) + جب (ج - د) جب (ا - ب) = ۰
سے جبری متماثلہ

$$(\text{د}-\text{ب})(\text{ا}-\text{ج})\{(\text{د}-\text{ب})^2+(\text{ا}-\text{ج})^2\}+(\text{ب}-\text{ج})(\text{ا}-\text{د})\{(\text{ب}-\text{ج})^2+(\text{ا}-\text{د})^2\}$$

$$+(\text{ج}-\text{د})(\text{ا}-\text{ب})\{(\text{ج}-\text{د})^2+(\text{ا}-\text{ب})^2\}=0$$

اخذ کرو ۔

(138) ۳۲ - ثابت کرو کہ فہ، $\frac{3 \text{ جب } 2 \text{ فہ}}{2(2+\text{جم } 2 \text{ فہ})}$ سے تقریباً $\frac{4}{45}$ فہ^5 کا فرق رکھتا ہے جہاں فہ ایک چھوٹا زاویہ ہے ۔

۳۳ - اُس چھوٹے سے چھوٹے زاویہ کا دائری ناپ اعشاریہ کے ۵ مقامات تک معلوم کرو جو مساوات

$$\text{جب } (\text{لا} + \tfrac{1}{4}\pi) = 10 \text{ جب لا}$$

کو پورا کرتا ہے ۔

۳۴ - مساوات $(\text{جب ط})^{\text{ل}} \text{ جم ط} = \text{ب}$ کو تقریبی طور پر حل کرو جہاں ل مثبت ہے

اور بڑا نہیں ہے اور یہ معلوم ہے کہ ط، عہ کے تقریباً مساوی ہے اور عہ خود بہت چھوٹا نہیں ہے۔

۳۵۔ ثابت کرو کہ ط کی صرف ایک مثبت قیمت ہے ایسی کہ ط = ۲ جب ط، اس کی قیمت اعشاریہ کے دو مقامات تک لوکارثمی جدول کے ذریعہ معلوم کرو۔

۳۶۔ رشتہ ا جب$^{-1}$ لا = ب جب$^{-1}$ ما میں جہاں ا اور ب ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد، صحیح عدد ہیں ثابت کرو کہ لا کی ہر قیمت کے جواب میں ما کی ۲ ب قیمتیں ہیں سوائے اُس صورت کے جبکہ ا اور ب دونوں طاق ہوں اور اس صورت میں ما کی ب قیمتیں ہیں۔

۳۷۔ یہ مانکر کہ اگر عہ وہ حادہ زاویہ ہو جس کی جیب $\frac{\text{ما}\sqrt{٣}}{٤}$ ہے جب، عہ کو $\frac{\text{ما}\sqrt{٣}}{٢٥٦}$ ہونا چاہیئے ثابت کرو کہ جم عہ - جم $\frac{٢٢}{٧}$ کا اضافہ $\frac{٣}{٢ \times ٧ \times ١٠}$ پر ٥٠٠٠٠٠ء سے کم ہے۔

نواں باب

مثلثی جدولیں (139)

۱۰۱ ـــــــــ علم مثلث کے ضابطوں کو مثلثوں کے حل میں اور عددی اعمال میں عملاً مفید ہونے کیلیے یہ ضروری ہے کہ ہمارے پاس عددی جدولیں موجود ہوں جن میں زاویوں کے دائری تفاعل درج ہوں، چنانچہ ان جدولوں سے ہم ایک دیے ہوئے زاویے کے متناظر دائری تفاعلوں کی قیمتیں کافی صحت کے ساتھ معلوم کر سکیں اور (بالعکس) وہ زاویہ معلوم کر سکیں جو تفاعل کی ایک دی ہوئی قیمت کے متناظر ہو۔ ایسی جدولیں دو قسم کی ہوتی ہیں، (۱) طبعی[1] جیوب، جیوب التمام، ماسوں، وغیرہ کی جدولیں جن میں زاویوں کی جیوب، جیوب التمام، ماسوں وغیرہ کی عددی قیمتیں اعشاریہ کے چند مقامات تک درج شدہ ہوتی ہیں، اور (۲) لوکارثمی جیوب، جیوب التمام، ماسوں وغیرہ کی جدولیں جن میں اساس ۱۰ پر ان تفاعلوں کے لوکارثم اعشاریہ کے چند مقامات تک درج شدہ ہوتے ہیں۔

[1] ـ لوکارثموں کو پہلے "مصنوعی اعداد" کہا جاتا تھا اور اس لیے معمولی اعداد طبعی اعداد کہلاتے تھے۔

ہو خرالذکر جدولیں اکثر علی مقاصد کے لیے استعمال ہوتی ہیں، اس قسم کی تقریباً تمام جدولوں میں تمام لوکارتموں کو بقدر ۱۰ کے بڑھا دیا جاتا ہے اور اس طرح منفی لوکارتموں کے استعمال سے اجتناب کیا جاتا ہے۔ اس طریقہ پر اضافہ شدہ لوکارتموں کو جدولی لوکارتم کہتے ہیں اور ان کو لکھا جاتا ہے یوں ل جب ۳۰°، اِس لیے

ل جب ۳۰° = ۱۰ + لوگ جب ۳۰°

طبعی دائری تفاعلوں کی جدولیں محسوب کرنا

۱۰۳۔۔۔ ہم اول یہ بتائینگے کہ طبعی دائری تفاعلوں کی جدولیں کس طرح محسوب کی جاتی ہیں جن سے اِن تفاعلوں کی قیمتیں، صفر سے ۹۰° تک اَ یا ۱۰اَ کے وقفوں سے تمام زاویوں کے لیے، اعشاریہ کے چند خاص مقررہ مقامات تک صحیح طور پر معلوم ہونگی۔ ہم پہلے اَ اور ۱۰اَ کی جیب اور جیب التمام محسوب کریں گے۔

(140) (۱) جب اَ، جم اَ معلوم کرنا۔

فرض کرو $ط = \frac{\pi}{۶۰ \times ۱۸۰}$، اَ کے دائری ناپ کو تعبیر کرتا ہے، تب

$$ط = \frac{۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳}{۱۰۸۰۰} = ۰٫۰۰۰۲۹۰۸۸۸۲۰۸۶۶۵$$

اعشاریہ کے ۱۵ مقامات تک، اس لیے

$$\frac{۱}{۶} ط^۳ = \frac{۱}{۶}(۰٫۰۰۰۳)^۳ = ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴$$

اعشاریہ کے ۱۲ مقامات تک۔

اب دفعہ ۹۵ کے مسئلہ کی رو سے جب اَ ط اور ط۔ $\frac{۱}{۶}$ ط^۳ کے

درمیان واقع ہوتا ہے اور یہ دو عدد صرف اعشاریہ کے بارہویں مقام میں ایک دوسرے سے فرق رکھتے ہیں، اس لیے اعشاریہ کے ۱۱ مقامات تک جب ١َ کی صحیح قیمت ہے

٠٫٠٠٠٢٩٠٨٨٨٢٠

نیز ہمیں حاصل ہوتا ہے ١ - ١/٢ ط٢ = ٫٩٩٩٩٩٩٩٥٧٦٩٢٠٢٥٠٢٩ اعشاریہ کے ۱۸ مقامات تک۔ اور

١/٢٤ ط٤ = ١/٢٤ (٫٠٠٢٩)٤ = ٫٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٢٩ اعشاریہ کے ۱۷ مقامات تک۔

اب جم ١َ، ١ - ١/٢ ط٢ اور ١ - ١/٢ ط٢ + ١/٢٤ ط٤ کے درمیان واقع ہے، اور چونکہ یہ دو عدد صرف اعشاریہ کے ۱۶ویں مقام میں ایک دوسرے سے فرق رکھتے ہیں اس لیے اعشاریہ کے ۱۵ مقامات تک

جم ١َ = ٫٩٩٩٩٩٩٩٥٧٦٩٢٠٢٥

(۲) جب ۱۰″، جم ۱۰″ معلوم کرنا۔

اگر ط = π/٦٤٨٠٠٠، جو ۱۰″ کا دائری ناپ ہے

تو ط = ٫٠٠٠٠٤٨٤٨١٣٦٨١١٠، اعشاریہ کے ۱۵ مقامات تک

١/٦ ط٣ = ٫٠...........٠٢١، اعشاریہ کے ۱۵ مقامات تک

اِس لیے ط اور ط - ١/٦ ط٣ یہ دو عدد ۱۲ویں مقام تک ایک دوسرے کے مماثل ہیں۔

اس لیے جب ۱۰″ = ٫٠٠٠٠٤٨٤٨١٣٦٨، اعشاریہ کے ۱۲ مقامات تک

نیز ١/٢٤ ط٤ اعشاریہ کے ۱۷ مقامات تک صفر ہے، اِس لیے جم ۱۰″ = ١ - ١/٢ ط٢ یا

جم ۱۰″ = ٫٩٩٩٩٩٩٩٩٨٨٢٤٨، اعشاریہ کے ۱۳ مقامات تک

۱۰۳ ـــــ ضابطوں

جب ن ٢ = ٢ جم ٢ جب (ن-١) ٢ - جب (ن-٢) ٢،

جم ن ٢ = ٢ جم ٢ جم (ن-١) ٢ - جم (ن-٢) ٢،

کی مدد سے ہم اَ یا ۱۰ً کے ضِعفوں کی جیوب اور جیوب التمام محسوب کرسکتے ہیں۔ فرض کرو ا = ۱۰ً، ۲ جم ۱۰ً = ۲ - ک جہاں ک = ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۳۵۰۴، تو یہ ضابطے لکھے جا سکتے ہیں۔

جب ن ا - جب (ن-۱) ا = {جب (ن-۱) ا - جب (ن-۲) ا} - ک جب (ن-۱) ا

جم ن ا - جم (ن-۱) ا = {جم (ن-۱) ا - جم (ن-۲) ا} - ک جم (ن-۱) ا؛

اگران ضابطوں میں ہم رکھیں ن = ۲ تو ہم جب ۲۰ً اور جم ۲۰ً محسوب کرسکتے (141)
ہیں۔ اب ن = ۳، ۴، ۵، ... فرض کرنے سے فرقوں جب ن ا - جب (ن-۱) ا، جم ن ا - جم (ن-۱) ا کو محسوب کیا جاسکتا ہے اگران سے پہلے کے فرق جم (ن-۱) ا - جم (ن-۲) ا، جب (ن-۱) ا - جب (ن-۲) ا اور نیز جب (ن-۱) ا اور جم (ن-۱) ا معلوم کرلیے گئے ہوں؛ پس یہ فرق ضابطوں کے مسلسل استعمال سے معلوم کیے جاسکتے ہیں؛ پھر ہم جب ن ا، جم ن ا معلوم کرسکتے ہیں اور اس طرح ۱۰ً کے وقفوں سے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کی ایک جدول بنا سکتے ہیں۔ چونکہ ک = ۰۰۰۰۰۰۰۰۲۳۵۴، اس لیے ک جب (ن-۱) ا، ک جم (ن-۱) ا کو محسوب کرنے میں ہمیں جب (ن-۱) ا، جم (ن-۱) ا کی قیمت کے صرف پہلے چند ہندسوں کو استعمال کرنے کی ضرورت ہے۔

۴۱ ـــــ جب ضابطوں کے متواتر استعمال سے جب ن ا، جم ن ا حسب قاعدہ بالا محسوب کرلیے جاتے ہیں تو جب ا، جم ا کی تقریبی قیمتوں کے استعمال سے جو خطائیں پیدا ہوتی ہیں وہ اس عمل میں اکٹھی ہوجائینگی؛ اس لیے یہ غور کرنا ضروری ہے کہ اس عمل میں اعشاریہ کے کتنے مقامات استعمال کیے جائیں کہ جب ا، جم ا کی اختیار کردہ قیمتوں سے (جو اعشاریہ کے چند مقامات تک صحیح ہیں) ہمیں جب ن ا، جم ن ا کی قیمتیں اعشاریہ کے مقامات کی ایک مقررہ تعداد تک صحیح معلوم ہوسکیں۔

فرض کرو کہ جب ا، جم ا اعشاریہ کے م مقامات تک محسوب کیے گئے ہیں

اور فرض کرو کہ ا کے متواتر ضعفوں کی جیوب اور جیوب التمام کے محسوب کرنے میں اعشاریہ کے مقامات کی تعداد ر رکھی گئی ہے؛ فرض کرو کہ جب ن ا یا جم ن ا کی قیمت جو اس عمل سے حاصل ہوتی ہے $\text{ع}_{\text{ن}}$ ہے، اور اس کے جواب میں صحیح قیمت $\text{ع}_{\text{ن}} + \text{ل}_{\text{ن}}$ ہے، تب

تب $\text{ع}_{\text{ن}} + \text{ل}_{\text{ن}} = (\text{۲}-\text{ک})(\text{ع}_{\text{ن-۱}} + \text{ل}_{\text{ن-۱}}) - (\text{ع}_{\text{ن-۲}} + \text{ل}_{\text{ن-۲}})$

نیز $\text{ع}_{\text{ن}} = (\text{۲}-\text{کَ})\,\text{ع}_{\text{ن-۱}} - \text{ع}_{\text{ن-۲}}$،

جہاں کَ، اعشاریہ کے ر مقامات تک ک کی تقریبی قیمت ہے۔ فرض کرو $(\text{ک}-\text{کَ})\,\text{ع}_{\text{ن-۱}} = \text{م}_{\text{ن}}$ تو

$$\text{ع}_{\text{ن}} = (\text{۲}-\text{ک})\,\text{ع}_{\text{ن-۱}} - \text{ع}_{\text{ن-۲}} + \text{م}_{\text{ن}}$$

اس لیے $\text{ل}_{\text{ن}} = (\text{۲}-\text{ک})\,\text{ل}_{\text{ن-۱}} - \text{ل}_{\text{ن-۲}} - \text{م}_{\text{ن}}$

یا $\text{ل}_{\text{ن}} = \text{۲}\,\text{ل}_{\text{ن-۱}} - \text{ل}_{\text{ن-۲}} - \text{ی}_{\text{ن}}$، جہاں $\text{ی}_{\text{ن}} = \text{م}_{\text{ن}} + \text{ک}\,\text{ل}_{\text{ن-۱}}$

اس کو لکھا جا سکتا ہے $(\text{ل}_{\text{ن}} - \text{ل}_{\text{ن-۱}}) = (\text{ل}_{\text{ن-۱}} - \text{ل}_{\text{ن-۲}}) - \text{ی}_{\text{ن}}$

پس اسی طرح $(\text{ل}_{\text{ن-۱}} - \text{ل}_{\text{ن-۲}}) = (\text{ل}_{\text{ن-۲}} - \text{ل}_{\text{ن-۳}}) - \text{ی}_{\text{ن-۱}}$

. . . .

$$\text{ل}_{\text{۲}} - \text{ل}_{\text{۱}} = \text{ل}_{\text{۱}} - \text{ی}_{\text{۲}}$$

اس لیے $\text{ل}_{\text{ن}} - \text{ل}_{\text{ن-۱}} = \text{ل}_{\text{۱}} - (\text{ی}_{\text{۲}} + \text{ی}_{\text{۳}} + \dots + \text{ی}_{\text{ن}})$؛

عدد $\text{ک}\,\text{ل}_{\text{ن-۱}}$، بمقابلہ $\text{۲}\,\text{ل}_{\text{ن-۱}}$ کے بہت چھوٹا ہے؛ اس لیے $\text{م}_{\text{ن}} + \text{ک}\,\text{ل}_{\text{ن-۱}}$، $\text{م}_{\text{ن}}$ سے ناقابلِ قدر فرق رکھتا ہے؛ پس عددوں $\text{ی}_{\text{۲}}$، $\text{ی}_{\text{۳}}$، ...، $\text{ی}_{\text{ن}}$ میں سے ہر ایک، $\frac{\text{۱}}{\text{۱۰}^{\text{ر}}}$ سے کم ہے اور اس لیے ان کا حسابی اوسط $\text{ط}_{\text{ن}}$، $\frac{\text{۱}}{\text{۱۰}^{\text{ر}}}$ سے کم ہے؛ اس لیے

لن - لن-۱ = لا - (ن-۱) طن ،

لن-۱ - لن-۲ = لا - (ن-۲) طن-۱ ،

. . . .

لا۲ - لا۱ = لا - ط۲

یا لن = ن لا - (ط۲ + ۲ط۳ + ... + ن-۱ طن) ؛

(142) اب چونکہ ط۲، ط۳، ...، طن میں سے ہر ایک ۱/۱۰^ر سے کم ہے اس لیے

-(ط۲ + ۲ط۳ + ...) > ½ن (ن-۱) / ۱۰^ر

یعنے لن > ن/۱۰^م + ن (ن-۱) / ۲ × ۱۰^ر

پس بداہتہً لن > ن/۱۰^م + ن۲ / ۲ × ۱۰^ر . . . . (عہ)

اگر اس ضابطہ میں رکھیں م = ۱۲، ن = ۱۰۸۰۰ تو

لن > ۱۰۸ / ۱۰^۱۰ + ۵۸۳۲ / ۱۰^(ر-۴)

> ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۱۰۸ + ۵۸۳۲ .... ۰۰٫

جہاں آخری عدد اعشاریہ میں (ر-۴) صفر ہیں؛ اس لیے اگر ر = ۱۵ تو لن > ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۶ یعنے عن اعشاریہ کے سات مقامات تک صحیح ہے۔ اب ۱۰۸۰۰ × ۱۰″ = ۳۰°، اس لیے ۳۰° کی جیب یا جیب التمام اعشاریہ کے سات مقامات تک صحیح معلوم ہوگی۔ اگر ہم ۱۰″ کے ضعفوں کے ذریعے ۳۰° تک کی جیوب یا جیوب التمام کے محسوب کرنے میں شروع سے آخر تک اعشاریہ کے ۱۵ مقامات لکھیں۔ ضابطہ (عہ) ایسی سب صورتوں میں عدد ر کو متعین کرنے کے لیے استعمال ہو سکتا ہے تاکہ لن اعشاریہ کے مقامات کی ایک خاص تعداد تک صفر ہو سکے[۱]

[۱] اس دفعہ کا کمل مولو سیرٹ (Serret) کی ٹرگنومیٹری سے لیا گیا ہے۔

مثال

ثابت کرد کہ ۰.۱ کے ضعفوں کے ذریعے ۴۵° تک کی جیوب اور جیوب التمام کو اعشاریہ کے ۵ صحیح مقامات تک محسوب کرنے کے لیے جب کہ جم ۰.۱، جب ۰.۱ کی قیمتیں اعشاریہ کے ۱۲ مقامات تک معلوم ہیں یہ ضروری ہے کہ شروع سے آخر تک عمل حساب میں اعشاریہ کے ۷ مقامات رکھے جائیں۔

۱۰۵ ـــــ جب اُن زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کی جدول درکار ہو جو ۰.۱ کے یا اَ کے وقفوں پر ہیں تو صرف ۳۰° تک کے زاویوں کے لیے قیمتیں محسوب کرنا ضروری ہوتا ہے کیونکہ ہم پھر ۳۰° سے ۶۰° تک کے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کی قیمتیں ضابطوں

جب (۳۰° + ا) + جب (۳۰° - ا) = جم ا،

جم (۳۰° - ا) - جم (۳۰° + ا) = جب ا،

کے ذریعے ا کو ۳۰° تک تمام قیمتیں دینے سے حاصل کر سکتے ہیں۔ اگر ۴۵° تک کے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام حاصل ہو جائیں تو پھر ۴۵° اور ۹۰° کے درمیان کے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام ضابطہ

جب ا = جم (۹۰° - ا)

کے ذریعے حاصل ہو سکتی ہیں؛ پس ۴۵° سے آگے کے زاویوں کے لیے عمل حساب کو جاری رکھنا غیر ضروری ہے۔

دائری تفاعلوں کی جدولوں کو محسوب کرنے کا جو طریقہ ہم نے اوپر بیان کیا ہے وہ دراصل ریٹی کس (Rheticus; 1514 - 1576) کا ہے؛ اس نے جیوب، مماسوں، اور قاطعوں کی جدولیں تیار کی تھیں جو ۱۵۹۶ء میں اس کے انتقال کے بعد شایع ہوئیں۔ قدیم ترین جدول ٹولمی[1] کی (Almagest) میں وتروں کی جدول ہے جو نصف درجہ کے وقفوں پر کے زاویوں کے لیے ہے۔ جدولوں (148)
کے مضمون پر تاریخی معلومات ہٹن (Hutton) کی ہسٹری آف میتھامیٹیکل ٹیبلس

[1] Ptolemy

(History of Mathematical Tables) سے حاصل ہوگی نیز دیکھو انگلش انسائیکلوپیڈیا میں ڈی مارگن[1] کا مضمون جدولوں پر۔

عددی جدولوں کی تصدیق

۱۰۶ــــــ پچھلے طریقہ سے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کی محسوب کردہ قیمتوں کی صحت کی تصدیق کرنے کے لیے طریقوں کا معلوم کرنا ضروری ہے، یہ تصدیق حسب ذیل ذرایع سے بہ عمل لائی جاسکتی ہے۔

(۱) دفعہ ۶۶ میں ہم نے زاویوں °۳، °۶، °۹....... کی جیوب اور جیوب التمام کی اصم قیمتوں کی ایک جدول بنائی تھی؛ اس لیے ہم ان زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کو اعشاریہ کے مقامات کی کسی مطلوبہ تعداد تک محسوب کرسکتے ہیں، پھر مصرحۂ بالا طریقہ سے زاویوں کے تفاعلوں کی جو قیمتیں حاصل ہوئی ہیں اُن کا مقابلہ اس طرح حاصل شدہ قیمتوں کے ساتھ کیا جاسکتا ہے۔ اگر ضرورت ہو تو اُن زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کی قیمتیں جو °۳ کے وقفوں پر ہیں، نصف زاویوں کے ضابطوں کے ذریعہ حاصل کی جاسکتی ہیں اور اس طرح ہمیں اعمالِ حساب پر اور زیادہ قریبی جانچ کا طریقہ حاصل ہوتا ہے۔

(۲) بعض مشہور ضابطے جن کو تصدیق کے ضابطے کہا جاتا ہے، یہ ہیں

جم (°۳۶ + ا) + جم (°۳۶ - ا) = جم ا + جب (°۱۸ + ا) + جب (°۱۸ - ا)،

جب ا = جب (°۳۶ + ا) - جب (°۳۶ - ا) + جب (°۷۲ - ا) - جب (°۷۲ + ا)

(یہ دو ضابطے یولر کے ہیں)

[1] De Morgan

جم ا = جب (۴۵° + ا) + جب (۴۵° - ا) - جب (۱۸° + ا) - جب (۱۸° - ا)؛

(یہ لیجنڈر کا ضابطہ ہے)

تصدیق کے لئے صرف یہ کرنا ہوتا ہے کہ ان متماثلات میں تفاعلوں کی حاصل کردہ قیمتیں درج کیجائیں۔

مماسوں اور قاطعوں کی جدولیں

۱۰۷ — مماسوں کی جدول بنانا ہو تو ۴۵° تک کے زاویوں کے مماس، ضابطہ $\text{مس ا} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}}$ کے ذریعے جیوب اور جیوب التمام کی جدولوں سے معلوم کرو؛ پھر ۴۵° سے ۹۰° تک کے زاویوں کے مماس کاگنولی[۱] کے ضابطے

مس (۴۵° + ا) = ۲ مس ۲ ا + مس (۴۵° - ا)

کے ذریعے حاصل ہو سکتے ہیں۔

قاطع التماموں کی جدول ضابطہ قم ا = مس $\frac{1}{2}$ ا + مم ا کے ذریعے اور قاطعوں کی جدول ضابطہ قط ا = مس ا + مس (۴۵° - $\frac{1}{2}$ ا) کے ذریعے بنائی جاسکتی ہیں۔

سلسلوں کے ذریعہ قیمتیں محسوب کرنا (144)

۱۰۸ — زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کو محسوب کرنے کا ایک جدید تر طریقہ دفعہ ۹۹ کے سلسلے استعمال کرانے کا ہے؛

اگر ہم رکھیں لا = $\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \frac{\pi}{2}$ تو

$$\text{جب}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times 90^\circ\right) = \left(\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3!}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \frac{\pi}{2}\right)^5 - \dots$$

۱ Cagnoli

$$\text{جم}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times 90^{\circ}\right) = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \frac{\pi}{2}\right)^{2} + \frac{1}{4!}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \frac{\pi}{2}\right)^{4} - \cdots\cdots$$

اس طرح ہمیں حاصل ہوتے ہیں ضابطے

	علامت	عدد	
$\text{جب}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times 90^{\circ}\right) =$		۱٫۵۷۰۷۹ ۶۳۲۶۷ ۹۴۸۹۶ ۶۱۹۲۳ ۱۳	$\frac{\text{م}}{\text{ن}}$
	−	۰٫۶۴۵۹۶ ۴۰۹۷۵ ۰۶۲۴۶ ۲۵۳۶۵ ۵۸	$\frac{\text{م}^{3}}{\text{ن}^{3}}$
	+	۰٫۰۷۹۶۹ ۲۶۲۶۲ ۴۶۱۶۷ ۰۴۵۱۲ ۰۵	$\frac{\text{م}^{5}}{\text{ن}^{5}}$
	−	۰٫۰۰۴۶۸ ۱۷۵۴۱ ۳۵۳۱۸ ۶۸۸۱۰ ۰۷	$\frac{\text{م}^{7}}{\text{ن}^{7}}$
	+	۰٫۰۰۰۱۶ ۰۴۴۱۱ ۸۴۷۸۷ ۳۵۹۸۲ ۱۹	$\frac{\text{م}^{9}}{\text{ن}^{9}}$
	−	۰٫۰۰۰۰۰ ۳۵۹۸۸ ۴۳۲۳۵ ۲۱۲۰۸ ۵۳	$\frac{\text{م}^{11}}{\text{ن}^{11}}$
	+	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۵۶۹ ۲۱۷۲۹ ۲۱۹۶۷ ۹۳	$\frac{\text{م}^{13}}{\text{ن}^{13}}$
	−	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۶ ۶۸۸۰۳ ۵۱۰۹۸ ۱۱	$\frac{\text{م}^{15}}{\text{ن}^{15}}$
	+	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۶۰۶۶ ۹۳۵۷۳ ۱۱	$\frac{\text{م}^{17}}{\text{ن}^{17}}$
	−	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۴۳ ۷۷۰۶۵ ۴۷	$\frac{\text{م}^{19}}{\text{ن}^{19}}$
	+	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۲۵۷۱۴ ۲۳	$\frac{\text{م}^{21}}{\text{ن}^{21}}$
	−	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۱۲۵ ۳۹	$\frac{\text{م}^{23}}{\text{ن}^{23}}$
	+	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۵۲	$\frac{\text{م}^{25}}{\text{ن}^{25}}$

جم $\left(\frac{م}{ن} \times 90^\circ\right)$ =	۱.۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰	
$\frac{م^2}{ن^2}$	۱.۲۳۳۷۰ ۰۵۵۰۱ ۳۶۱۶۹ ۸۲۷۳۵ ۴۳	−
$\frac{م^4}{ن^4}$	۰.۲۵۳۶۶ ۹۵۰۷۹ ۰۱۰۴۸ ۰۱۳۶۳ ۶۶	+
$\frac{م^6}{ن^6}$	۰.۰۲۰۸۶ ۳۴۸۰۷ ۶۳۳۵۲ ۹۶۰۸۷ ۳۱	−
$\frac{م^8}{ن^8}$	۰.۰۰۰۹۱ ۹۲۶۰۲ ۷۴۸۳۹ ۴۲۶۵۸ ۰۲	+
$\frac{م^{10}}{ن^{10}}$	۰.۰۰۰۰۲ ۵۲۰۲۰ ۴۲۳۷۳ ۰۶۰۶۰ ۵۵	−
$\frac{م^{12}}{ن^{12}}$	۰.۰۰۰۰۰ ۰۴۷۱۰ ۸۷۴۷۷ ۸۸۱۸۱ ۷۲	+
$\frac{م^{14}}{ن^{14}}$	۰.۰۰۰۰۰ ۰۰۰۶۳ ۸۶۶۰۳ ۰۸۳۷۹ ۱۹	−
$\frac{م^{16}}{ن^{16}}$	۰.۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۶۵۶۵۹ ۶۳۱۱۴ ۹۸	+
$\frac{م^{18}}{ن^{18}}$	۰.۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۵۲۹ ۴۴۰۰۲ ۰۱	−
$\frac{م^{20}}{ن^{20}}$	۰.۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۳ ۴۳۷۷۳ ۹۲	+
$\frac{م^{22}}{ن^{22}}$	۰.۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۱۸۳۵ ۹۹	−
$\frac{م^{24}}{ن^{24}}$	۰.۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۸ ۲۱	+
$\frac{م^{26}}{ن^{26}}$	۰.۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۳	−

(145) چونکہ صرف ۴۵° تک کے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کا محسوب کرنا ضروری ہے اس لیے کہ کسر $\frac{م}{ن}$ ہمیشہ $\frac{1}{2}$ سے کم لی جاتی ہے، اس لیے سلسلوں کی بہت تھوڑی رقمیں اعشاریہ کے چند مقامات تک قیمتیں دریافت کرنے کے لیے کافی ہیں۔ یہ سلسلے یولر کی Analysis of the Infinite سے لیے گئے ہیں جہاں انہیں اعشاریہ کے مزید چھ مقامات تک دیا گیا ہے۔

لوکارتمی جدولیں

۱۰۹۔۔۔ جب طبعی جیوب اور جیوب التمام کی جدولیں تیار ہو جائیں تو لوکارتمی جیوب اور جیوب التمام کی جدولیں معمولی لوکارتم کی جدولوں کے ذریعے بنائی جاسکتی ہیں کیونکہ ان جدولوں سے کسی زاویہ کی جیب یا جیب التمام کی محسوب کردہ عددی قیمت کا لوکارتم ملیگا؛ اس طور پر حاصل شدہ لوکارتم میں ۱۰ جمع کرو تو متناظر جدولی لوکارتم مل جاتا ہے۔ لوکارتمی مماس رشتہ

ل مس ا = ۱۰ + ل جب ا - ل جم ا

کے ذریعہ معلوم کیے جاسکتے ہیں اور اس طرح لوکارتمی مماسوں کی ایک جدول تیار ہو سکتی ہے۔ ہم کسی آئندہ باب میں ایک راست طریقہ بتائینگے جس سے لوکارتمی جیوب، جیوب التمام اور مماس کی جدولیں بنائی جاسکتی ہیں۔

مثلثی جدولوں کا بیان اور ان کا استعمال

۱۱۰۔۔۔ مثلثی جدولیں، طبعی یا لوکارتمی، بموجب ذیل بنائی جاتی ہیں:۔

(۱) ان سے بالراست صرف صفر اور ۹۰° کے درمیانی زاویوں کے لیے تفاعلوں کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں؛ ان حدود سے متجاوز مقدار دل کے زاویوں کے لیے تفاعلوں کی قیمتیں فوراً اخذ کی جاسکتی ہیں۔

(۲) ان جدولوں سے صفر سے ۴۵° تک اور ۴۵° سے ۹۰° تک کے زاویوں کے تفاعلوں کی قیمتیں ایک ہی ہندسوں کی دو مرتبہ قراوت کے ذریعے ملتی ہیں؛ تفاعلوں کے نام جیب، جیب التمام، مماس اور نیز درجے (‹ ۴۵°) صفحہ کی پیشانی پر لکھے ہوتے ہیں، اور متناظر دقیقے اور ثانئے دائیں طرف کے ستون میں لکھے ہوتے ہیں، زاویے بڑھتے جاتے ہیں جیسے جیسے ہم ستون میں نیچے اترتے ہیں۔ نیز جیب التمام، جیب، مماس التمام اور درجے (› ۴۵°) صفحہ کے پائین پر ان ستونوں میں بالترتیب لکھے جاتے ہیں۔[۱]

[۱] اس عبارت کا سلسلہ صفحہ ۲۴۰ پر دیکھو۔

(146)

۱۷درجے

'	"	جیب	فرق	جیب التمام	فرق	ظل	فرق	ظل التمام	"	'
۵۰	۰	۹۴۴۸۶۰۷۴۹		۹۹۹۷۸۶۱۴۸		۹۴۵۰۷۴۶۰۲		۰۵۴۹۲۵۳۹۸	۰	۱۰
			۶۵۵		۶۸		۷۲۲			
	۱۰	۹۴۴۸۶۱۴۰۴		۹۹۹۷۸۶۰۸۰		۹۴۵۰۷۵۳۲۴		۰۵۴۹۲۴۶۷۶	۵۰	
			۶۵۴		۶۸		۷۲۲			
	۲۰	۹۴۴۸۶۲۰۵۸		۹۹۹۷۸۶۰۱۲		۹۴۵۰۷۶۰۴۶		۰۵۴۹۲۳۹۵۴	۴۰	
			۶۵۴		۶۸		۷۲۲			
	۳۰	۹۴۴۸۶۲۷۱۲		۹۹۹۷۸۵۹۴۴		۹۴۵۰۷۶۷۶۸		۰۵۴۹۲۳۲۳۲	۳۰	
			۶۵۴		۶۷		۷۲۲			
	۴۰	۹۴۴۸۶۳۳۶۶		۹۹۹۷۸۵۸۷۷		۹۴۵۰۷۷۴۹۰		۰۵۴۹۲۲۵۱۰	۲۰	
			۶۵۴		۶۸		۷۲۲			
	۵۰	۹۴۴۸۶۴۰۲۰		۹۹۹۷۸۵۸۰۹		۹۴۵۰۷۸۲۱۲		۰۵۴۹۲۱۷۸۸	۱۰	
			۶۵۴		۶۸		۷۲۱			
۵۱	۰	۹۴۴۸۶۴۶۷۴		۹۹۹۷۸۵۷۴۱		۹۴۵۰۷۸۹۳۳		۰۵۴۹۲۱۰۶۷	۰	۹
			۶۵۴		۶۸		۷۲۲			

د	ق	ماس	فرق	ماس التمام	فرق	جیب	فرق	جیب التمام		
	۱۰	۹٫۴۸۶۵۳۲۸		۹٫۹۷۸۵۶۷۳		۹٫۵۰۷۹۶۵۵		۰٫۴۹۲۰۳۴۵	۵۰	
			۶۵۳		۶۸		۷۲۱			
	۲۰	۹٫۴۸۶۵۹۸۲		۹٫۹۷۸۵۶۰۵		۹٫۵۰۸۰۳۷۶		۰٫۴۹۱۹۶۲۴	۴۰	
			۶۵۳		۶۷		۷۲۲			
	۳۰	۹٫۴۸۶۶۶۳۵		۹٫۹۷۸۵۵۳۸		۹٫۵۰۸۱۰۹۸		۰٫۴۹۱۸۹۰۲	۳۰	
			۶۵۴		۶۸		۷۲۱			
	۴۰	۹٫۴۸۶۷۲۸۹		۹٫۹۷۸۵۴۷۰		۹٫۵۰۸۱۸۱۹		۰٫۴۹۱۸۱۸۱	۲۰	
			۶۵۳		۶۸		۷۲۱			
	۵۰	۹٫۴۸۶۷۹۴۲		۹٫۹۷۸۵۴۰۲		۹٫۵۰۸۲۵۴۰		۰٫۴۹۱۷۴۶۰	۱۰	
			۶۵۳		۶۸		۷۲۱			
۵۲	۰	۹٫۴۸۶۸۵۹۵		۹٫۹۷۸۵۳۳۴		۹٫۵۰۸۳۲۶۱		۰٫۴۹۱۶۷۳۹	۰	

۳۷ درجه

جن میں صفحہ کی پیشانی پر جیب، جیب التمام، مماس لکھے ہوئے ہیں؛ بائیں طرف کے ستون میں ان زاویوں کے دقیقے اور ثانیے لکھے ہوتے ہیں جو قبل الذکر زاویوں کے تکملے ہیں، ظاہر ہے کہ یہ موخرالذکر زاویے بڑھتے ہیں جیسے جیسے ہم ستون میں اوپر چڑھتے ہیں۔ ہم نے نمونہ کے طور پر اوپر کیلیٹ (Callet) کے سات ہندسی لوکارتمی جدولوں کے ایک صفحہ کا حصہ دیا ہے، یہ جدولیں ۱۰ کے وقفوں پر کے زاویوں کے لیے تیار کی گئی ہیں۔

مثلاً جس ستون کے سرے پر جیب التمام لکھا ہے اُس کی تیسری سطر سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ ۹٫۹۷۸۶۰۱۲، زاویہ ۱۷° ۵۰´ ۴۰´´ کی جدولی لوکارتمی جیب التمام ہے، اور بائیں طرف کے ستون میں دقیقوں اور ثانیوں کو پڑھنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ یہی عدد، متکمل زاویے ۷۲° ۹´ ۲۰´´ کی لوکارتمی جیب ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ لوکارتمی جیوب اور مماس زاویہ کے ساتھ بڑھتے ہیں لیکن لوکارتمی جیوب التمام اور مماس التمام زاویہ کے بڑھنے سے گھٹتے ہیں۔

۱۱۱ــــــ اب اگر کوئی زاویہ ایسا ہو جس کی مقدار دو زاویوں کے درمیان جن کے تفاعل جدول میں درج ہیں واقع ہے تو اس زاویہ کے تفاعلوں کو معلوم کرنے کے لئے ہم ایک اصول استعمال کرینگے جس کی تحقیق ابھی کی جائیگی؛ وہ اصول یہ ہے کہ سوائے ان زاویوں کے جو یا تو بہت چھوٹے ہیں یا زاویہ قائمہ کے بہت قریب ہیں کسی زاویہ کے طبعی تفاعل یا لوکارتمی تفاعل میں چھوٹی تبدیلیاں خود زاویے میں جو تبدیلی ہوئی ہے اس کے متناسب ہوتی ہیں۔

مثلاً اگر دو متصلہ جدولی قیمتوں کے درمیان فرق ع ہے جب کہ جدولی زاویے میں ۱۰ کا فرق ہے تو چھوٹے جدولی زاویہ کے تفاعل کی (147)

قیمت اور اس سے بقدر ما بڑے ایک زاویہ کے تفاعل کی قیمت کے درمیان فرق ما/۱۰ عہ ہوگا؛ زاویہ میں ۱۰″ اضافہ کے جواب میں تفاعل کا اضافہ عہ ہے اور اس لیے زاویہ میں ما (<۱۰″) کے اضافہ کے جواب میں تفاعل کا اضافہ عہ کی وہ کسر ہے جو ما کو ۱۰ کے ساتھ ہے، یعنی ما/۱۰ عہ۔ کیلٹ کی جدولوں میں (جس کا نمونہ اوپر دیا گیا ہے) متصلہ لوکارتموں کے درمیان کے فرق بغیر علامت اعشاریہ کے اس ستون میں دیے گئے ہیں جس کے سرے پر "فرق" لکھا ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ ہمیں ل جب ۱۷° ۵۱′ ۱۳″ کی قیمت معلوم کرنی ہے، جدول سے ہم حاصل کرتے ہیں

ل جب ۱۷° ۵۱′ ۱۰″ = ۹٫۴۸۶۵۳۲۸

ل جب ۱۷° ۵۱′ ۲۰″ = ۹٫۴۸۶۵۹۸۲

فرق = ۶۵۴

تب ۳/۱۰ × ۶۵۴ = ۱۹۶٫۲ ، اس لیے پہلے لوکارتم میں ہمیں ۰٫۰۰۰۰۱۹۶ جمع کرنا چاہیے، اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

ل جب ۱۷° ۵۱′ ۱۳″ = ۹٫۴۸۶۵۵۲۴

نیز فرض کرو کہ ہمیں وہ زاویہ مطلوب ہے جس کا جدولی لوکارتمی مماس ۹٫۵۰۸۲۰۳۲ ہے۔ جدول میں ہم دیکھتے ہیں کہ دیا ہوا لوکارتم ذیل کے دو لوکارتموں کے درمیان واقع ہے۔

ل مس ۱۷° ۵۱′ ۴۰″ = ۹٫۵۰۸۱۸۱۹

ل مس ۱۷° ۵۱′ ۵۰″ = ۹٫۵۰۸۲۵۴۰

فرق = ۷۲۱

دیے ہوئے لوکارتمی مماس اور جدول سے حاصل شدہ پہلے لوکارتمی مماس کے درمیان فرق ۲۱۳ ہے، اس لیے وہ زاویہ جس کو ۱۷° ۵۱′ ۴۰″ میں جمع کرنا ہوگا ۲۱۳/۷۲۱ × ۱۰″ = ۲٫۹۶″ (تقریباً ۳″) ہے۔ پس مطلوبہ زاویہ ہے ۱۷° ۵۱′ ۴۳″ تقریباً۔

تناسب اجزاء کا اصول

۱۱۲ـــــ اب ہم اس امر کی تحقیق کرینگے کہ تناسب اضافہ کا اصول، جو ہم نے دفعہ سابق میں اختیار کیا ہے کہاں تک صحیح ہے اور کن مستثنیات کے ساتھ؟

فرض کرو کہ لا سے کوئی زاویہ تعبیر ہوتا ہے اور ف (لا) سے لا کا کوئی طبعی یا لوکارثمی تفاعل تعبیر ہوتا ہے تو ہم مختلف صورتوں میں یہ بتائینگے کہ اگر ھ کوئی چھوٹا زاویہ ہو جس کو دائری ناپ میں ناپا گیا ہے اور اگر اس کو لا میں جمع کیا جائے تو

$$ف (لا + ھ) - ف (لا) = ھ فَ (لا) + ھ^2 س،$$

جہاں فَ (لا)، لا کا کوئی دوسرا تفاعل ہے اور س وہ تفاعل ہے جو محدود رہتا ہے جبکہ ھ = ۰.

اس ربط سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ھ کافی چھوٹا ہو تو لا کی ایک دی ہوئی قیمت کے لیے ف (لا + ھ) - ف (لا)، ھ کے تناسب ہے اور یہ معلوم ہوگا کہ بالعموم $ھ^2$ س اس قدر چھوٹا ہوگا کہ وہ، تفاعلوں کی قیمتوں پر اعشاریہ کے مقامات کی اُس تعداد تک جو جدول میں درج ہے اثر انداز نہ ہوگا۔ (148)

پس لا کی ایک دی ہوئی قیمت کے لیے

$$\frac{ف (لا + ھ) - ف (لا)}{ھ}$$

اعشاریہ کے مقامات کی جدولی تعداد تک مستقل ہے۔ تاہم دو مستثنیٰ صورتیں پیدا ہونگی۔

(۱) اگر لا ایسا ہو کہ فَ (لا) بہت چھوٹا ہے تو فرق ف (لا+ھ) - ف (لا) معدوم ہو سکتا ہے بلحاظ اس رتبہ کے جو جدولوں میں درج ہے؛ تب فرق ف (لا + ھ) - ف (لا) کو ناقابل قدر (Insensible) کہتے ہیں اور

اس صورت میں ف (لا) کی دو یا زیادہ متصلہ جدولی قیمتیں ایک ہی ہوسکتی ہیں۔

(۲) اگر لا ایسا ہو کہ بمقابلہ فَ (لا) کے س بڑا ہے تو ممکن ہے کہ رقم ھ² س بمقابلہ ھ فَ (لا) کے چھوٹی نہ ہو؛ اِس صورت میں فرق ف (لا + ھ) - ف (لا)، ھ کے متناسب نہیں ہے اور اس کو ہم بے قاعدہ کہینگے۔

اِن دونوں صورتوں (۱) اور (۲) میں تناسبوں کا طریقہ ناکام رہتا ہے لیکن ہم یہ بتائینگے کہ کس طرح خاص ترکیبوں سے یہ مشکلات رفع ہوتی ہیں۔

ٹیلر کے مسئلہ سے جس سے طالب علم واقف ہے یہ معلوم ہوگا کہ مندرجۂ بالا ضابطہ ٹیلر کے مسئلہ

ف (لا + ھ) = ف (لا) + ھ فَ (لا) + ½ ھ² فً (لا + طھ)

کی خاص صورت ہے جس میں ط، صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے، پس س = ½ فً (لا + ط ھ) اور ف (لا + ھ) - ف (لا) = ھ فَ (لا) مان لینے سے جو خطا ہوتی ہے وہ ½ ھ² فً (ی) کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتوں کے درمیان واقع ہے جو وہ حدود ی = لا اور ی = لا + ھ کے درمیان اختیار کرتا ہے۔

۲۱۱ ـــ اول فرض کرو کہ ف (لا) = جب لا

تو جب (لا + ھ) = جب لا جم ھ + جم لا جب ھ

یا جب (لا + ھ) - جب لا = جم لا (ھ - ⅙ ھ³ + ...) - جب لا (½ ھ² - 1/24 ھ⁴ + ...)

= ھ جم لا - ½ ھ² جب لا + ھ کی اعلیٰ قوتیں

اس صورت میں فَ (لا) = جم لا، اور س کی تقریبی قیمت = - ½ جب لا

پس جب (لا + ھ) - جب لا = ھ جم لا - ½ ھ² جب لا ..... (۱)

فرق کی تقریبی مساوات ہے۔

اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ تقریبی طور پر

جم (لا + ھ) - جم لا = - ھ جب لا - ½ ھ² جم لا ..... (۲)

نیز مس (لا + ھ) ـ مس لا = جب ھ / جم لا جم (لا + ھ) ......

= ھ / جم۲ لا ـ ھ جب لا جم لا

یا تقریبی طور پر

مس (لا + ھ) ـ مس لا = ھ قط۲ لا + ھ۲ قط۲ مس لا .... (۳)

(149) نیز ل جب (لا + ھ) ـ ل جب لا = لوک جب (لا + ھ) / جب لا

= لوک (۱ ـ ½ ھ۲ + ھ مم لا)

یا ل جب (لا + ھ) ـ ل جب لا = ھ مم لا ـ ½ ھ۲ قم۲ لا .... (۴)

اسی طرح ل جم (لا + ھ) ـ ل جم لا = ـ ھ مس لا ـ ½ ھ۲ قط۲ لا ..... (۵)

ل مس (لا + ھ) ـ ل مس لا = ھ / جب لا جم لا ـ ۲ ھ۲ جم ۲ لا / جب۲ ۲ لا .... (۶)

ہر صورت میں ہم نے ر کی صرف تقریبی قیمت معلوم کی ہے ۔ یعنی ہم نے وہ رقمیں چھوڑ دی ہیں جن میں ھ کی تیسری اور اعلیٰ قوتیں شامل ہوتی ہیں ۔ ان چھ مساواتوں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر ھ کافی چھوٹا ہے تو فرق، لا کی ایسی قیمتوں کے لیے جو نہ چھوٹی ہیں اور نہ زاویہ قائمہ کے تقریباً مساوی، ھ کے متناسب ہیں ۔ حسب ذیل مستثنیٰ صورتیں پیدا ہوتی ہیں :ـ

(۱) فرق، جب (لا + ھ) ـ جب (لا) ناقابل قدر ہے جب کہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو کیونکہ ایسی صورت میں ھ جم لا بہت چھوٹا ہے؛ نیز یہ فرق بے قاعدہ بھی ہے کیونکہ ½ ھ۲ جب لا، ھ جم لا کے ساتھ مقابلہ پذیر ہو سکتا ہے ۔

(۲) فرق، جم (لا + ھ) ـ جم لا، ناقابل قدر ہے جب کہ لا چھوٹا ہو،

نیز یہ اس صورت میں بے قاعدہ بھی ہے۔
(۳) فرق، مس (لا + ھ) - مس لا، بے قاعدہ ہے جبکہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو کیونکہ ایسی صورت میں ھ۲ قط۲ لا مس لا، ھ قط۲ لا کے ساتھ مقابلہ پذیر ہو سکتا ہے۔
(۴) فرق، ل جب (لا + ھ) - ل جب لا، بے قاعدہ ہے جب کہ لا چھوٹا ہو اور ناقابل قدر اور بے قاعدہ دونوں جب کہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو۔
(۵) فرق، ل جم (لا + ھ) - ل جم لا، ناقابل قدر اور بے قاعدہ ہے جب کہ لا چھوٹا ہو، اور بے قاعدہ ہے جب کہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو۔
(۶) فرق، ل مس (لا + ھ) - ل مس لا، بے قاعدہ ہے جب کہ لا خواہ چھوٹا ہو یا تقریباً ایک زاویہ قائمہ۔
یہ توجہ طلب ہے کہ جو فرق ناقابل قدر ہے وہ بے قاعدہ بھی ہے لیکن اس کا عکس درست نہیں ہے۔
تقرب کا وہ درجہ معلوم کرنے کے لیے جس تک تناسب اجزا کا اصول کسی صورت میں درست رہتا ہے سادہ ترین طریقہ یہ ہے کہ سا کی اصلی قیمت پر غور کیا جائے؛ جب (لا + ھ) - جب لا کی صورت میں دوسری رقم کی اصلی قیمت ہے - ½ ھ۲ جب (لا + طہ ھ) جہاں طہ صفر اور ایک کے درمیان ہے؛ اگر جدول ۱ً کے وقفوں پر بنائی گئی ہے تو ½ ھ۲ کی بڑی سے بڑی قیمت ہے

$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi \cdot 1}{180 \times 60 \times 60}\right)^2$ یا $\frac{1}{2}$ (۰۰۰۰۰۵، ۰)۲ ؛ اس سے اعشاریہ کے پہلے

(50) آٹھ مقامات تک کوئی خطا واقع نہیں ہوتی؛ مس (لا + ھ) - مس لا کی صورت میں خطا ہے

(۰۰۰۰۰۵، ۰)۲ قط۲ (لا + طہ ھ) مس (لا + طہ ھ)

پس اگر مس لا + مس۳ لا = ۴۰ تو خطا، اعشاریہ کے ساتویں مقام سے ظاہر ہونا شروع

کرگیجی۔ ل جب لا کی صورت میں اعشاریہ کے ساتویں مقام تک کوئی خطا نہ ہوگی اگر لا > ۵۔

۱۱۴ —— جب ایک تفاعل کے فرق اعشاریہ کے اتنے مقامات تک جتنے جدولوں میں درج ہوتے ہیں، ناقابل قدر ہوں تو جدولوں سے یہ تفاعل معلوم ہوگا جب کہ زاویہ معلوم ہو، لیکن اس کے برعکس ہم اس تفاعل کے ذریعہ کسی درمیانی زاویہ کو معلوم کرنے کے لیے جدولیں استعمال نہیں کرسکتے؛ مثلاً چھوٹے زاویوں کے لیے ہم ل جم لا کی قیمت سے لا متعین نہیں کرسکتے، یا ایک زاویہ قائمہ کے تقریباً مساوی زاویوں کے لیے ل جب لا کی قیمت سے لا متعین نہیں کرسکتے۔ جب ایک تفاعل کے فرق بے قاعدہ ہوں اور ناقابل قدر نہ ہوں تو متناسب اجزا کا مذکورہ بالا تقریبی طریقہ تفاعل کے ذریعہ زاویہ کی تعین کے لیے کافی نہیں ہے اور نہ زاویہ کے ذریعہ تفاعل کی تعیین کے لیے کافی ہے؛ مثلاً تقرب ناقابل قبول ہے

ل جب لا کے لیے جبکہ لا چھوٹا ہو،

ل جم لا کے لیے جبکہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو،

اور ل مس لا کے لیے جبکہ لا چھوٹا ہو یا تقریباً ایک زاویہ قائمہ کے مساوی۔

ان صورتوں میں جن میں فرق بے قاعدہ ہیں اور ناقابل قدر نہیں ہیں حسب ذیل ذرائع استعمال کیے جاسکتے ہیں تاکہ تفاعل کی ایک دی ہوئی قیمت کے جواب میں زاویہ معلوم ہوسکے یا ایک دیے ہوئے زاویہ کے جواب میں تفاعل کی قیمت معلوم ہوسکے:۔

(۱) ہم ل جب لا، ل مس لا کی وہ جدولیں جو ایک ثانیہ کے وقفوں پر کے زاویوں کے لیے پہلے چند درجوں تک محسوب کی گئی ہوتی ہیں اور ل جم لا، ل مس لا کی وہ جدولیں جو ۹۰° کے قریب کے چند زاویوں کے لیے ایک ثانیہ کے وقفوں پر تیار کی گئی ہوتی ہیں استعمال کرسکتے ہیں۔ کیلٹ اپنے مثلثی جدولوں میں ایسی ایک جدول دیتا ہے۔

پھر ہم اُن تمام زاویوں کے لیے جو صفر کے یا زاویہ قائمہ کے بالکل قریب نہ ہوں متناسب اجزا کا اصول استعمال کرسکتے ہیں۔

(۲) ڈلمبر[۵] کا طریقہ

اس طریقہ میں ل جب لا یا ل مس لا کو ایسی دو رقموں کے مجموعہ میں توڑ دیا جاتا ہے کہ ان میں سے ایک کے لئے فرق ناقابل قدر ہوتے ہیں لا کی اُن قیمتوں کے نزدیک جہاں بے قاعدگی واقع ہوتی ہے، اور دوسری رقم کے لیے فرق باقاعدہ ہوتے ہیں۔ اِن رقموں میں سے پہلی کے لیے فرق بے قاعدہ ہے لیکن اس کی چنداں اہمیت نہیں ہے کیونکہ یہ فرق ناقابلِ قدر بھی ہے۔ پس اگر ایک چھوٹے زاویہ نً کا دائری ناپ لا ہو تو

$$\text{ل جب نً} = \left(\text{لوک}\ \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} + \text{ل عہ}\right) + \text{لوک ن}،$$

151) $$\text{ل مس نً} = \left(\text{لوک}\ \frac{\text{مس لا}}{\text{لا}} + \text{ل عہ}\right) + \text{لوک ن}،$$

جہاں عہ، اً کا دائری ناپ ہے۔

اب $$\text{لوک (ن + ھ)} - \text{لوک ن} = \text{لوک}\left(\text{۱} + \frac{\text{ھ}}{\text{ن}}\right)$$

$$= \frac{\text{ھ}}{\text{ن}} - \frac{\text{ھ}^{۲}}{\text{۲ن}^{۲}} + \ldots\ldots،$$

اس لیے لوک ن کے لیے فرق باقاعدہ ہیں اگر ھ بمقابلہ ن کے چھوٹا ہو۔ نیز لوک $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$، لوک $\frac{\text{مس لا}}{\text{لا}}$ کے لیے فرق ناقابل قدر ہیں کیونکہ

$$\text{لوک}\ \frac{\text{جب (لا+ھ)}}{\text{لا+ھ}} - \text{لوک}\ \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = \text{لوک}\ \frac{\text{جب (لا+ھ)}}{\text{جب لا}} - \text{لوک}\ \frac{\text{لا+ھ}}{\text{لا}}$$

$$= \text{ھ مم لا} - \frac{\text{ھ}^{۲}}{۲}\ \text{قم}^{۲}\ \text{لا} - \frac{\text{ھ}}{\text{لا}} + \frac{\text{ھ}^{۲}}{\text{۲لا}^{۲}}$$

$$= \text{ھ}\left(\text{مم لا} - \frac{۱}{\text{لا}}\right) + \frac{\text{ھ}^{۲}}{۲}\left(\frac{۱}{\text{لا}^{۲}} - \text{قم}^{۲}\ \text{لا}\right)،$$

۵ے Delambre

اور $\text{لوک}\,\dfrac{\text{مس}\,(\text{لا}+\text{ھ})}{\text{لا}+\text{ھ}} - \text{لوک}\,\dfrac{\text{مس لا}}{\text{لا}}$

$$= \text{ھ}\left(\frac{1}{\text{جب لا جم لا}} - \frac{1}{\text{لا}}\right) + \frac{\text{ھ}^2}{2}\left(-\frac{4\,\text{جم}\,2\,\text{لا}}{\text{جب}^2\,2\,\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا}^2}\right)\ldots$$

اِن میں سے ہر فرق ناقابل قدر ہے کیونکہ ھ کا سر چھوٹا ہے جبکہ لا چھوٹا ہو۔

اگر لوک $\dfrac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ + ل ع، لوک $\dfrac{\text{مس لا}}{\text{لا}}$ + ل ع کی قیمتوں کی جدولیں ربع کے پہلے چند درجوں تک تیار کی جائیں تو ہم ان جدولوں کو عددوں کے طبعی لوکارتموں کی جدولوں کے ساتھ ن کو ٹھیک طور پر معلوم کرنے کے لیے استعمال کرسکتے ہیں جبکہ ل جب نً یا ل مس نً دیا گیا ہو، یا بالعکس۔

اگر ل جب نً یا ل مس نً دیا گیا ہے تو ن کی تقریبی قیمت معلوم کرو؛ پھر جدول سے لوک $\dfrac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ + ل ع یا لوک $\dfrac{\text{مس لا}}{\text{لا}}$ + ل ع کی قیمت حاصل کرو جن میں سے ہر ایک بہت سست بدلتا ہے۔ تب لوک ن اِس قیمت

$$\text{ل جب نً} - \left(\text{لوک}\,\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} + \text{ل ع}\right)$$

یا

$$\text{ل مس نً} - \left(\text{لوک}\,\frac{\text{مس لا}}{\text{لا}} + \text{ل ع}\right)$$

سے حاصل ہوتا ہے اور ہم طبعی لوکارتموں کی جدول سے ن کو ٹھیک ٹھیک (152)
معلوم کرلیتے ہیں۔ اگر ن دیا گیا ہے تو جدول سے لوک $\dfrac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ + ل ع کی قیمت ملتی ہے اور پھر جب نً کو ضابطہ سے معلوم کیا جاتا ہے۔

(۳) میاسکلین (Maskelyne) کا طریقہ۔

اس طریقہ کا اصول وہی ہے جو ڈلمبر کے طریقہ کا ہے۔ اگر

لا ایک چھوٹا زاویہ ہو تو

جب لا / لا = ۱ - لا^۲ / ۶ = (۱ - لا^۲ / ۲)^{۱/۳} = جم^{۱/۳} لا، تقریباً

اس لیے لوک جب لا = لوک لا + ۱/۳ لوک جم لا

اب چونکہ لا ایک چھوٹا زاویہ ہے، لوک جم لا کے فرق ناقابل قدر ہیں؛ اس لیے جم لا کی تقریبی قیمت کا استعمال کرنا کافی ہے۔ اگر لوک جب لا دیا گیا ہے تو ہم لا کی تقریبی قیمت معلوم کرتے ہیں اور اس کو لوک جم لا کی قیمت معلوم کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں؛ پھر مساوات بالا سے لا حاصل ہو جاتا ہے۔ اگر لا دیا گیا ہے تو ہم طبعی لوکارتموں کی جدول سے لوک لا ٹھیک ٹھیک معلوم کر سکتے ہیں اور نیز لوک جم لا کی تقریبی قیمت؛ تب اوپر کے ضابطہ سے لوک جب لا مل جاتا ہے۔ اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ لوک مس لا، ضابطہ لوک مس لا = لوک لا - ۲/۳ لوک جم لا سے حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال

ثابت کرو کہ ضابطہ ذیل میاسکلین کے ضابطہ سے زیادہ قریبی طور پر صحیح ہے۔

لوک جب ط = لوک ط - ۱/۴۵ لوک جم ط + ۶۴/۴۵ لوک جم ط/۲

لوکارثمی اعمال حساب کے لیے ضابطوں کو موزوں بنانا

۱۱۵ـــــ کسی جملہ کو ایسی شکل میں تحویل کرنے کے لیے کہ لوکارتموں کی جدولوں کی مدد سے عددی قیمتیں محسوب کی جا سکیں ایسے ابدالات

عمل میں لانے چاہئیں جو دیے ہوئے جملوں کو سادہ جملوں کے حاصل ضرب میں تحویل کردیں؛ یہ عمل ایک یا زیادہ معاون زاویوں کے ذریعہ اکثر ہوسکیگا مثلاً دیکھو امثلہ ذیل:-

(۱) $\sqrt[3]{\text{ا}^6+\text{ب}^6} = \text{ا}^2\ \text{قط}^{\frac{2}{3}}\ \text{فہ}$، جہاں $\text{مس فہ} = \frac{\text{ب}^3}{\text{ا}^3}$

پس $\text{لوک}\ \sqrt[3]{\text{ا}^6+\text{ب}^6} = 2\ \text{لوک ا} + \frac{2}{3}\ (\text{ل قط فہ} - 10)$

جہاں $\text{ل مس فہ} = 10 + 3\ (\text{لوک ب} - \text{لوک ا})$

اس طرح $\sqrt[3]{\text{ا}^6+\text{ب}^6}$ لوکارتمی جدولوں کے ذریعہ محسوب کیا جاسکتا ہے اگر فہ پہلے ان جدولوں سے معلوم کرلیا گیا ہو۔

(۲) $\text{ا جم عہ} + \text{ب جیب عہ} = \text{ا جم}\ (\text{عہ} - \text{فہ})\ \text{قط فہ}$، جہاں $\text{مس فہ} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ (158)

پس $\text{لوک}\ (\text{ا جم عہ} + \text{ب جیب عہ}) = \text{لوک ا} + \text{ل جم}\ (\text{عہ} - \text{فہ}) - \text{ل جم فہ}$

جہاں $\text{ل مس فہ} = 10 + \text{لوک ب} - \text{لوک ا}$

سے فہ معلوم ہوتا ہے۔

۱۱۶ — دودرجی مساوات کی اصلیں عدداً محسوب کرنا جبکہ اصلیں حقیقی ہوں۔

فرض کرو کہ مساوات $\text{ا لا}^2 + \text{ب لا} + \text{ج} = 0$ ہے اور اول فرض کرو کہ ا اور ج دونوں مثبت ہیں۔ اب مساوات $\text{مس}^2\ \text{طہ} - 2\ \text{قم}\ 2\ \text{طہ مس طہ} + 1 = 0$ پر غور کرو اور فرض کرو $\text{لا} = \text{ما}\ \sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ا}}}$ تو لا کی مساوات بالا ہوجاتی ہے

$$\text{ما}^2 + \text{ب ما} \big/ \sqrt{\text{ا ج}} + 1 = 0$$

پس اگر $\text{جب}\ 2\ \text{طہ} = 2\ \sqrt{\text{ا ج}} \big/ \text{ب}$ تو ما کی دودرجی مساوات وہی ہوگی جو - مس طہ کی ہے جس کی اصلیں - مس طہ، - مم طہ ہیں۔ پس دیے ہوئے دودرجی کی اصلیں ہیں

$-\sqrt{\text{ج}/\text{ا}}$ مس طہ ، $-\sqrt{\text{ج}/\text{ا}}$ مم طہ

جہاں جب ۲ طہ = $\frac{۲\sqrt{\text{اج}}}{\text{ب}}$ ، اور اس لیے اصلیں لوکارثمی جدولوں کے ذریعہ محسوب کی جاسکتی ہیں۔

اگر ا اور ج مختلف العلامت ہوں تو ہم دو درجی کو الا² + ب لا + ج = ۰ لے سکتے ہیں؛ اس صورت میں رکھو لا = ما $\sqrt{\text{ج}/\text{ا}}$ تو دو درجی

$$\text{ما}^2 + \text{ب ما}/\sqrt{\text{اج}} - ۱ = ۰$$

میں تحویل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا مقابلہ مساوات

$$\text{مس}^2\ \text{طہ} + ۲\ \text{مم}\ ۲\ \text{طہ مس طہ} - ۱ = ۰$$

کے ساتھ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مس ۲ طہ = ۲ $\sqrt{\text{اج}}$/ب تو لا میں دو درجی مساوات کی اصلیں ہیں $\sqrt{\text{ج}/\text{ا}}$ مس طہ اور $-\sqrt{\text{ج}/\text{ا}}$ مم طہ۔

۱۷۱ — کعبی لا³ + ق لا + ر = ۰ کی اصلیں محسوب کرنا جبکہ اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں۔

مساوات جب³ طہ − $\frac{۳}{۴}$ جب طہ + $\frac{۱}{۴}$ جب ۳ طہ = ۰

پر غور کرو۔ فرض کرو لا = ما $\sqrt{-\frac{۴}{۳}\text{ق}}$ تو لا میں جو کعبی مساوات ہے وہ ہوجاتی ہے

$$\text{ما}^3 - \frac{۳}{۴}\text{ما} + \text{ر}\left(-\frac{۳}{۴}\text{ق}\right)^{\frac{۳}{۲}} = ۰$$

یہ مساوات وہی ہوگی جو جب طہ کی مندرجہ بالا مساوات ہے اگر

$$\text{جب}\ ۳\ \text{طہ} = ۴\text{ر}\left(-\frac{۳}{۴}\text{ق}\right)^{\frac{۳}{۲}} = \left(-\frac{۲۷\text{ر}^2}{۴\text{ق}^3}\right)^{\frac{۱}{۲}} ،$$

اس لیے لا کی قیمتیں ہیں:

$\sqrt{-\frac{۴}{۳}\text{ق}}$ جب طہ، $\sqrt{-\frac{۴}{۳}\text{ق}}$ جب (طہ + $\frac{۲}{۳}\pi$)، $\sqrt{-\frac{۴}{۳}\text{ق}}$ جب (طہ + $\frac{۴}{۳}\pi$)،

وہ شرط کہ کعبی کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں یہ ہے کہ جب ۳ ط ≯ ۱

(154)
ہم کسی آئندہ باب میں دو خیالی اصلوں والی کعبی مساوات کی اصلیں دریافت کرنے کا طریقہ بیان کرینگے۔

وہ اعمال جن کے ذریعہ ہم نے دو درجی اور کعبی مساواتوں کو حل کیا ہے یہ بتاتے ہیں کہ یہ دو جبری مسئلے فی الواقعی اُن ہندسی مسئلوں کے مماثل ہیں جو ایک زاویہ کی علی الترتیب تنصیف و تثلیث سے متعلق ہیں۔ اِس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک دو درجی مساوات صرف پٹڑی اور پرکار کی مدد سے ترسیمی طور پر حل کی جاسکتی ہے لیکن کعبی مساوات ان کی مدد سے ترسیمی طور پر بالعموم حل نہیں ہوسکتی کیونکہ یہ آلے ایک زاویہ کی تثلیث کے ہندسی مسئلہ کو عام طور پر حل کرنے کے لیے ناکافی ہیں۔

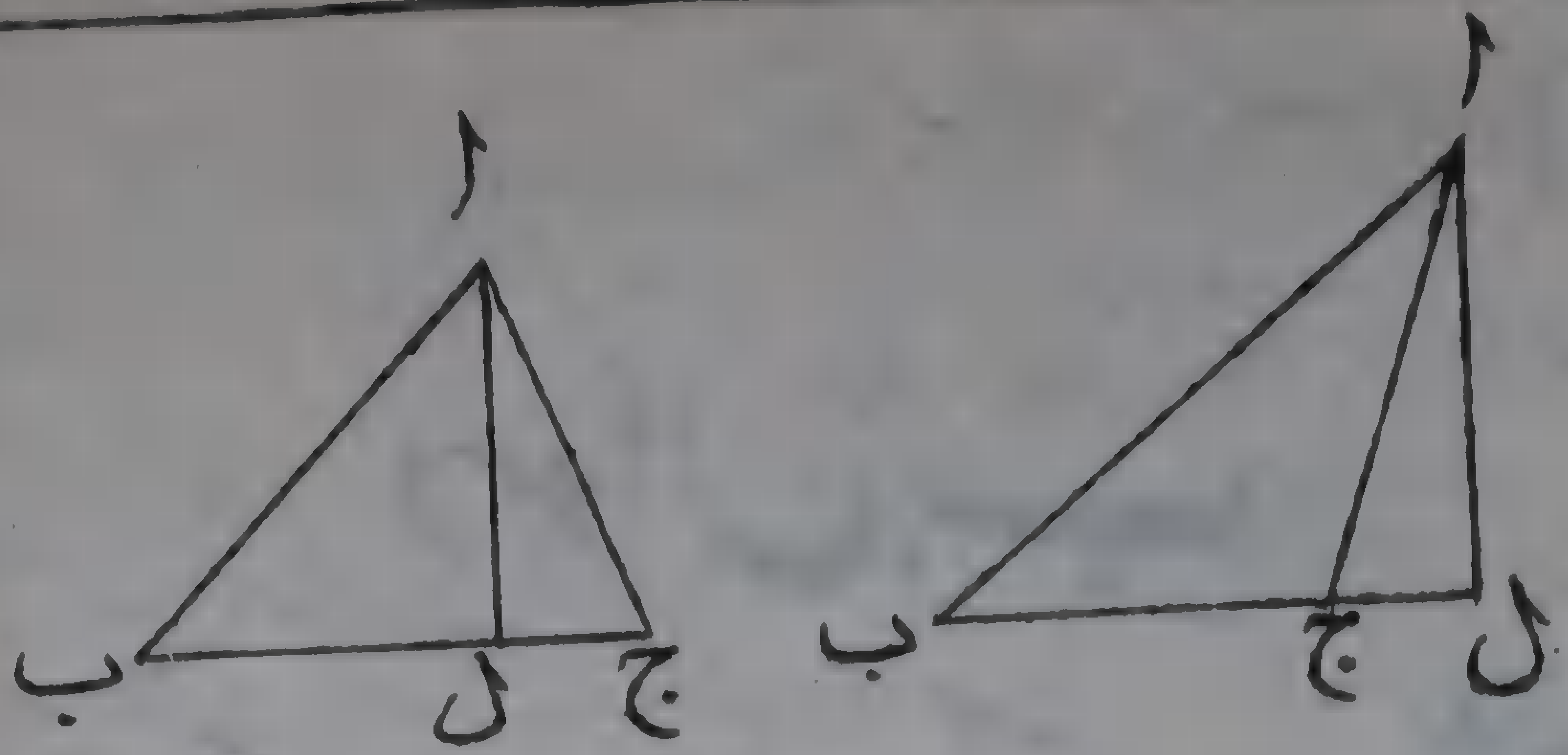
(155)

دسواں باب

مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان رشتے

۱۱۸ــــــ اگر ا ب ج کوئی مثلث ہو تو ہم زاویوں ب ا ج، ا ب ج، ا ج ب کی مقداروں کو علی الترتیب بڑے حروف ا، ب، ج سے تعبیر کرینگے اور ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب کے طولوں کو علی الترتیب چھوٹے حروف ا، ب، ج سے۔ ہم اس باب میں مختلف اہم مسئلوں کی تحقیق کرینگے جو مثلث کے ضلعوں ا، ب، ج کو زاویوں کے دائری تفاعلوں کے ساتھ مربوط کرتے ہیں۔ اِن ضابطوں سے اُن طریقوں کی بنیاد ملیگی جن کے ذریعہ مثلث کو اُن مختلف صورتوں میں حل کیا جاتا ہے جن میں مثلث کے تین اجزا دیے جاتے ہیں۔

۱۱۹ــــــ ظِلّوں کے بنیادی مسئلے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ب ج پر ب ا، ا ج کے ظلّوں کا مجموعہ ب ج کے مساوی ہے اور ب ج پر کے ایک عمود پر ان کے ظلّوں کا مجموعہ صفر ہے۔ ان واقعات کو بیان کرنے کے بعد چونکہ ا ج کی مثبت سمت، ب ج کی مثبت سمت کے ساتھ زاویہ۔ ج بناتی ہے اِس لیے



ب ا جم ب + ا ج جم ج = ا ،

یا ج جم ب + ب جم ج = ا ،

اور ب ا جب ب ـ ا ج جب ج = ۰ ،

یا ج جب ب ـ ب جب ج = ۰ ،

جس کو لکھا جا سکتا ہے ب / جب ب = ج / جب ج ؛ (158)

اسی طرح دیگر دو ضلعوں اور ان پر کے عمودوں میں سے ہر ایک پر باری باری سے ظل لینے سے جو رشتے حاصل ہوتے ہیں اُن کو اور محصلہ بالا رشتوں کو حسب ذیل شکل میں لکھا جا سکتا ہے :-

ا = ب جم ج + ج جم ب ،

ب = ج جم ا + ا جم ج ، .... (۱)

ج = ا جم ب + ب جم ا ،

ا / جب ا = ب / جب ب = ج / جب ج .... (۲)

مساواتوں (۲) سے اِس واقعہ کا اظہار ہوتا ہے کہ کسی مثلث کے اضلاع، متقابلہ زاویوں کی جیبوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

۱۲۰ —— رشتوں (۲) کو اس طرح بھی ثابت کیا جا سکتا ہے:-
مثلث ا ب ج کا حائط دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ اس کا نصف قطر ر ہے، تب ضلع ب ج = ۲ × دائرہ کا نصف قطر × اُس زاویے کے نصف کی جیب جو ب ج کے محاذی مرکز پر بنتا ہے

یعنی ب ج = ۲ ر جب ا یا ۲ ر جب (۱۸۰° - ا)

پس ا = ۲ ر جب ا

اسی طرح ب = ۲ ر جب ب

اور ج = ۲ ر جب ج

اس لیے $\frac{\text{ا}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{ب}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{جب ج}} = \text{۲ ر}$

رشتہ (۲) کو (۱) سے بھی اخذ کیا جا سکتا ہے، چنانچہ پہلی دو مساواتوں کو شکل

ا - ب جم ج - ج جم ب = ۰،

- ا جم ج + ب - ج جم ا = ۰،

میں رکھنے سے ہم ا، ب، ج کی نسبتیں دریافت کر سکتے ہیں اور اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ا}}{\text{جم ج جم ا + جم ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جم ب جم ج + جم ا}} = \frac{\text{ج}}{\text{۱ - جم}^{۲}\text{ ج}}؛$$

اس لئے $\frac{\text{ا}}{\text{جب ا جب ج}} = \frac{\text{ب}}{\text{جب ب جب ج}} = \frac{\text{ج}}{\text{جب}^{۲}\text{ ج}}$

یعنی $\frac{\text{ا}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{ب}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{جب ج}}$

(۲) سے (۱) کو اخذ کرنے کے لیے چونکہ

$$\text{ا} = \frac{\text{ا}}{\text{جب ا}}\text{ جب (ب + ج)} = \frac{\text{ا}}{\text{جب ا}}\text{(جب ب جم ج + جم ب جب ج)،}$$

اس لیے $ا = \frac{ب}{جب ب}$ جب ب جم ج + $\frac{ج}{جب ج}$ جم ب جب ج = ب جم ج + ج جم ب
جو رشتوں (۱) میں سے پہلا رشتہ ہے۔ بالکل اسی طرح دیگر دو رشتے اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

اگر ہم (۱) کی تین مساواتوں سے ا، ب، ج کو ساقط کریں تو ہمیں رشتہ حاصل ہوتا ہے

جم^2 ا + جم^2 ب + جم^2 ج + ۲ جم ا جم ب جم ج = ۱

جو مثلث کے زاویوں کی جیب التماموں کے درمیان درست رہتا ہے۔

۱۲۱ ــــ اگر ہم مساواتوں (۱) کو علی الترتیب ا، ب، ج سے ضرب دیں اور پھر انہیں جمع کریں (157)

تو ب^2 + ج^2 − ا^2 = ۲ ب ج جم ا

جس سے ایک زاویے کی جیب التمام کے لیے ضلعوں کی رقوم میں ایک جملہ حاصل ہوتا ہے؛ اس ربط کو مع اُن دو ربطوں کے جو جم ب اور جم ج کے لیے ہیں اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$\left.\begin{array}{l} ا^2 = ب^2 + ج^2 - ۲\ ب\ ج\ جم\ ا \\ ب^2 = ج^2 + ا^2 - ۲\ ج\ ا\ جم\ ب \\ ج^2 = ا^2 + ب^2 - ۲\ ا\ ب\ جم\ ج \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (۳)$$

۱۲۲ ــــ ہم ان رشتوں (۳) کو اقلیدس جلد دوم مسائل ۱۲ اور ۱۳ کی مدد سے بالراست اخذ کر سکتے ہیں۔

اگر ا ل، ب ج پر عمود ہو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

ا ب^2 = ا ج^2 + ب ج^2 − ۲ ب ج × ج ل

جبکہ زاویہ ج حادہ ہو، اور

ا ب^2 = ا ج^2 + ب ج^2 + ۲ ب ج × ج ل

جبکہ زاویہ ج منفرجہ ہو۔ پہلی صورت میں

ج ل = ا ج جم ج

اور دوسری صورت میں

$$\text{ج ل} = \text{ا ج جم} (180^\circ - \text{ج}) = -\text{ا ج جم ج}$$

اس لیے ہر دو صورتوں میں

$$\text{ج}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 - 2\,\text{ا ب جم ج}$$

رشتوں (۳) سے (۲) کو اخذ کرنے کے لیے چونکہ

$$\text{جم ا} = \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2}{2\,\text{ب ج}}$$

اس لیے

$$\text{جب}^2\,\text{ا} = \frac{4\,\text{ب}^2\text{ج}^2 - (\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2)^2}{4\,\text{ب}^2\text{ج}^2} = \frac{(2\,\text{ب ج} + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2)(2\,\text{ب ج} + \text{ا}^2 - \text{ب}^2 - \text{ج}^2)}{4\,\text{ب}^2\text{ج}^2}$$

یا

$$\text{جب}^2\,\text{ا} = \frac{(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})(\text{ب} + \text{ج} - \text{ا})(\text{ج} + \text{ا} - \text{ب})(\text{ا} + \text{ب} - \text{ج})}{4\,\text{ب}^2\text{ج}^2}$$

پس ا^2 سے تقسیم کرنے سے $\frac{\text{جب}^2\,\text{ا}}{\text{ا}^2}$ حسب ذیل متشاکل جملے کے مساوی ہے

$$\frac{(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})(\text{ب} + \text{ج} - \text{ا})(\text{ج} + \text{ا} - \text{ب})(\text{ا} + \text{ب} - \text{ج})}{4\,\text{ا}^2\text{ب}^2\text{ج}^2}$$

اس لیے

$$\frac{\text{جب}^2\,\text{ا}}{\text{ا}^2} = \frac{\text{جب}^2\,\text{ب}}{\text{ب}^2} = \frac{\text{جب}^2\,\text{ج}}{\text{ج}^2}$$

جس سے نتیجہ (۲) حاصل ہوتا ہے۔

(۳) سے (۱) کو اخذ کرنے کے لیے (۳) کی پہلی دو مساواتوں کو ج سے تقسیم کرو اور پھر انہیں جمع کرو تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}{\text{ج}} = 2\,\text{ج} + \frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}{\text{ج}} - 2\,(\text{ب جم ا} + \text{ا جم ب})$$

(158) یا

$$\text{ج} = \text{ب جم ا} + \text{ا جم ب}$$

۱۲۳ — ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{جب}^2\,\tfrac{1}{2}\text{ا} = \tfrac{1}{2}(1 - \text{جم ا})،\quad \text{جم}^2\,\tfrac{1}{2}\text{ا} = \tfrac{1}{2}(1 + \text{جم ا})$$

اس لیے

$$\text{جب}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا} = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{\text{ب}^{2}+\text{ج}^{2}-\text{ا}^{2}}{2\,\text{ب ج}}\right)،$$

$$\text{جم}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{\text{ب}^{2}+\text{ج}^{2}-\text{ا}^{2}}{2\,\text{ب ج}}\right)،$$

یا

$$\text{جب}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا} = \frac{(\text{ا}+\text{ب}-\text{ج})(\text{ا}-\text{ب}+\text{ج})}{4\,\text{ب ج}}$$

$$\text{جم}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا} = \frac{(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})(\text{ب}+\text{ج}-\text{ا})}{4\,\text{ب ج}}$$

اب فرض کرو ۲ س = ا + ب + ج تو ۲ (س - ا) = ب + ج - ا،
اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا} = \frac{(\text{س}-\text{ب})(\text{س}-\text{ج})}{\text{ب ج}}،\quad \text{جم}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا} = \frac{\text{س}(\text{س}-\text{ا})}{\text{ب ج}}؛$$

اس لیے
$$\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا} = \left\{\frac{(\text{س}-\text{ب})(\text{س}-\text{ج})}{\text{ب ج}}\right\}^{\frac{1}{2}}،\quad \text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا} = \left\{\frac{\text{س}(\text{س}-\text{ا})}{\text{ب ج}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا} = \left\{\frac{(\text{س}-\text{ب})(\text{س}-\text{ج})}{\text{س}(\text{س}-\text{ا})}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ان ضابطوں کے ذریعے زاویوں کے تفاعل معلوم کرنے میں جبکہ ضلع دیے گئے ہوں زیادہ سہولت ہے بہ نسبت ضابطوں (۳) کے کیونکہ ان کو زیادہ آسانی کے ساتھ لوکارتمی اعمال حساب کے لیے موزوں بنایا جاسکتا ہے۔

۱۲۴ — چونکہ $\dfrac{\text{جب ب}}{\text{ب}} = \dfrac{\text{جب ج}}{\text{ج}}$ اس لیے

$$\frac{\text{جب ب} \pm \text{جب ج}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{ب} \pm \text{ج}}{\text{ا}}،\ \text{یا}\ \frac{2\,\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب}\pm\text{ج})\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب}\mp\text{ج})}{2\,\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب}+\text{ج})\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب}+\text{ج})} = \frac{\text{ب}\pm\text{ج}}{\text{ا}}$$

اِس لیے $\frac{\text{ب+ج}}{\text{ا}} = \frac{\text{جم}\ \frac{1}{2}(\text{ب-ج})}{\text{جم}\ \frac{1}{2}(\text{ب+ج})}$، اور

$$\frac{\text{ب-ج}}{\text{ا}} = \frac{\text{جب}\ \frac{1}{2}(\text{ب-ج})}{\text{جب}\ \frac{1}{2}(\text{ب+ج})}،$$

یا $\text{ا} = \frac{(\text{ب+ج})\ \text{جب}\ \frac{1}{2}\text{ا}}{\text{جم}\ \frac{1}{2}(\text{ب-ج})}$، $\text{ا} = \frac{(\text{ب-ج})\ \text{جم}\ \frac{1}{2}\text{ا}}{\text{جب}\ \frac{1}{2}(\text{ب-ج})}$ ......(۵)

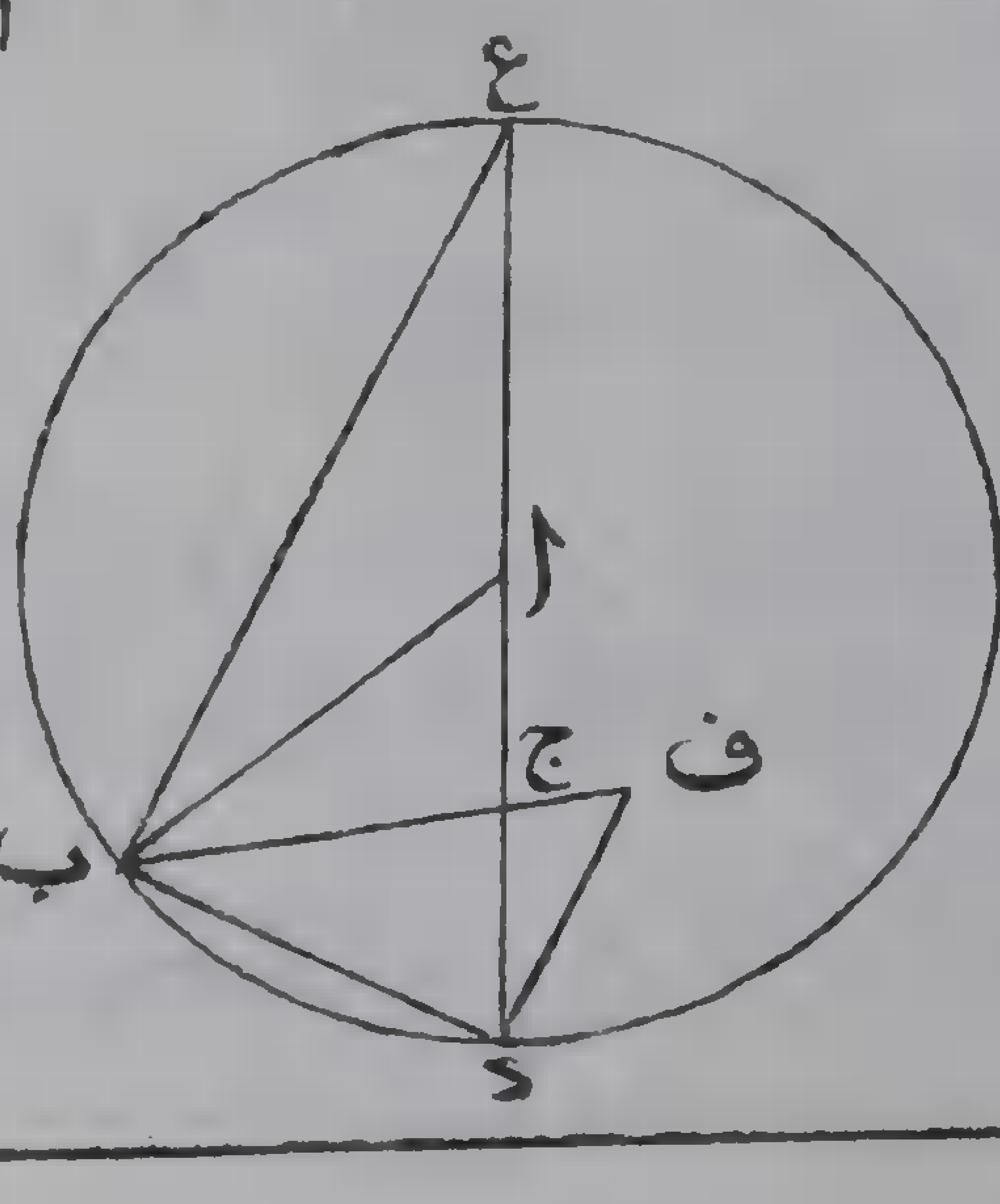
اس لیے عمل تقسیم سے ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس}\ \frac{1}{2}(\text{ب-ج}) = \frac{\text{ب-ج}}{\text{ب+ج}}\ \text{مم}\ \frac{1}{2}\text{ا} \quad .... (۵)$$

اِن ضابطوں کو ہندسی طور پر ثابت کرنے کے لیے مرکز ا اور نصف قطر ا ب کے ساتھ ایک دائرہ کھینچو جو ا ج کو د اور ع پر قطع کرے، د ف، ب ع کے متوازی کھینچو، تب

ج ع = ب + ج، د ج = ج - ب، د ع ب = $\frac{1}{2}$ ا، اور
د ب ف = ج + $\frac{1}{2}$ ا - ۹۰° = $\frac{1}{2}$ ج - $\frac{1}{2}$ ب، اب چونکہ

$\frac{\text{ج د}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{جب ب ف}}{\text{جب ع د ب}}$، یا $\frac{\text{ب-ج}}{\text{ا}} = \frac{\text{جب}\ \frac{1}{2}(\text{ب-ج})}{\text{جم}\ \frac{1}{2}\text{ا}}$



159)

اور نیز $\frac{\text{ب}+\text{ج}}{\text{ج}-\text{ب}} = \frac{\text{ج ع}}{\text{ج ح}} = \frac{\text{ع ب}}{\text{د ف}} = \frac{\text{ب ح مم } \frac{1}{2}\text{ ا}}{\text{ب ح مس } \frac{1}{2}(\text{ج}-\text{ب})}$

$= \frac{\text{مم } \frac{1}{2}\text{ ا}}{\text{مس } \frac{1}{2}(\text{ج}-\text{ب})}$

اِس لیے　$\text{مس } \frac{1}{2}(\text{ب}-\text{ج}) = \frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{ب}+\text{ج}} \text{ مم } \frac{1}{2}\text{ ا}$

مثلث کا رقبہ

۱۲۵ ـــــ کسی مثلث کا رقبہ اُس متوازی الاضلاع کے رقبہ کا نصف ہوتا ہے جو اُسی قاعدہ پر اُسی ارتفاع کے ساتھ بنایا گیا ہو جو کہ مثلث کے ہیں؛ اگر ضلع ا قاعدہ ہو تو ارتفاع ب جب ج یا ج جب ب ہوگا اور اس لیے مثلث کے رقبہ کے لیے ہمیں حسب ذیل جملے ملینگے:-

$\frac{1}{2}\text{ ا ب جب ج}$ اور $\frac{1}{2}\text{ ا ج جب ب}$

پس مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × کوئی دو ضلعوں کا حاصل ضرب × ان کے درمیانی زاویہ کی جیب

یعنے مثلث کا رقبہ اس کے کسی دو ضلعوں اور اِن کے درمیانی زاویہ کی جیب کے حاصل ضرب کا نصف ہوتا ہے۔

اب جب ا کی بجائے وہ جملہ جو دفعہ ۱۲۲ میں معلوم کیا جا چکا ہے یعنے

$\frac{1}{2\text{ ب ج}}\sqrt{(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})(\text{ب}+\text{ج}-\text{ا})(\text{ج}+\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}+\text{ب}-\text{ج})}$

استعمال کرنے سے مثلث کے رقبہ کے لیے ہمیں یہ جملہ

$\frac{1}{4}\sqrt{(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})(\text{ب}+\text{ج}-\text{ا})(\text{ج}+\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}+\text{ب}-\text{ج})}$

یا $\sqrt{\text{س}\,(\text{س}-\text{ا})\,(\text{س}-\text{ب})\,(\text{س}-\text{ج})}$ .... (۶)

ملتا ہے۔ اسکندریہ کے ہیروؔ[1] نے یہ ضابطہ تقریباً ۱۲۵ ق-م میں حاصل کیا تھا۔ اِس ضابطہ (۶) کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{1}{4}\sqrt{2\,\text{ب}^2\text{ج}^2+2\,\text{ج}^2\text{ا}^2+2\,\text{ا}^2\text{ب}^2-\text{ا}^4-\text{ب}^4-\text{ج}^4}$$

مثلث کے ضلعوں اور زاویوں میں تغیرات

(160) ۱۲۶ —— اب ہم اُن رشتوں کی تحقیق کرینگے جو ایک مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کی قیمتوں کے مثبت یا منفی چھوٹے اضافوں کے درمیان پائے جاتے ہیں۔ فرض کرو کہ ایک مثلث کے اجزاء میں سے تین اجزا کی پیمایش کی گئی ہے جن میں سے کم از کم ایک جزو ضلع ہے، باقی دیگر تین اجزاء اِس باب کے ضابطوں سے متعین ہونگے؛ تب اِن اجزا کے اضافوں کے درمیان جو رشتے ہوتے ہیں اُن کی مدد سے ہم یہ معلوم کر سکینگے کہ قبل الذکر اجزا کی پیمایش میں چھوٹی خطاوں کی موجودگی سے مابعد الذکر تین اجزا کی قیمتوں میں کیا خطائیں واقع ہوتی ہیں۔ ہم فرض کرلینگے کہ اضافے اس قدر چھوٹے ہیں کہ ان کے مربع اور حاصل ضرب نظر انداز ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کی قیمتیں ا، ب، ج، ا، ب، ج ہیں جن میں تین یعنے ایک ضلع اور دو زاویے، یا دو ضلع اور ایک زاویہ، یا تین ضلعوں کی قیمتیں پیمایش کے ذریعہ معلوم کی گئی ہیں اور دوسری تین قیمتیں ان پیمایش کردہ قیمتوں کے ساتھ مذکورۂ بالا ضابطوں کے

[1] دیکھو بال کی ہسٹری آف میاتھمیٹکس صفحہ ۸۲ جس میں اس ضابطہ کا اصلی ہندسی ثبوت دیا گیا ہے

ذریعہ مربوط ہیں۔ اگر ان پیمایش کردہ اجزا میں کوئی خطا واقع ہوئی ہے تو اس کا نتیجہ یہ ہوگا کہ دیگر تین اجزا کی قیمتوں میں جو ضابطوں سے حاصل کی گئی ہیں خطائیں واقع ہونگی۔

فرض کرو کہ زاویوں اور ضلعوں کی صحیح قیمتیں ا + مف ا، ب + مف ب، ج + مف ج، ا + مف ا، ب + مف ب، ج + مف ج ہیں؛ ہم ان چھ خطاؤں مف ا، مف ب، مف ج، مف ا، مف ب، مف ج کے درمیان رشتے معلوم کرینگے۔ یہ فرض کرنا سہولت بخش ہوگا کہ زاویوں کے اضافے دائری ناپ میں پیمایش کیے گئے ہیں، ان کو فوراً ثانیوں میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے　ج جب ب - ب جب ج = ۰

اور (ج + مف ج) جب (ب + مف ب) - (ب + مف ب) جب (ج + مف ج) = ۰؛

اب چونکہ مف ب، مف ج کے مربع نظر انداز ہوسکتے ہیں اس لیے

جب (ب + مف ب) = جب ب + مف ب جم ب،

جب (ج + مف ج) = جب ج + مف ج جم ج

اس لیے　(ج + مف ج) (جب ب + مف ب جم ب) - (ب + مف ب) (جب ج + مف ج جم ج) = ۰۔

اس لیے اگر مف ج، مف ب، مف ب، مف ج کے حاصل ضرب نظر انداز کیے جائیں تو

ج جم ب × مف ب + جب ب × مف ج - ب جم ج مف ج - جب ج مف ب = ۰؛

اسی طرح اور دو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں اور یہ کل تین مساواتیں اس طرح لکھی جاسکتی ہیں:-

جب ج × مف ب - جب ب × مف ج = ج جم ب × مف ب - ب جم ج × مف ج
جب ا × مف ج - جب ج × مف ا = ا جم ج × مف ج - ج جم ا × مف ا　　......(۱)
جب ب مف ا - جب ا × مف ب = ب جم ا × مف ا - ا جم ب × مف ب

نیز چونکہ

$$\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = \pi ،$$

اور $\text{ا} + \text{مف ا} + \text{ب} + \text{مف ب} + \text{ج} + \text{مف ج} = \pi$

(161) اس لیے $\text{مف ا} + \text{مف ب} + \text{مف ج} = 0 ،$ .... (۸)

مساواتیں (۷) ایک دوسرے کے غیر تابع نہیں ہیں جیسا کہ ان کو شکل

$$\frac{\text{مف ب}}{\text{ب}} - \frac{\text{مف ج}}{\text{ج}} = \text{مم ب} \times \text{مف ب} - \text{مم ج} \times \text{مف ج} ،$$

$$\frac{\text{مف ج}}{\text{ج}} - \frac{\text{مف ا}}{\text{ا}} = \text{مم ج} \times \text{مف ج} - \text{مم ا} \times \text{مف ا} ،$$

$$\frac{\text{مف ا}}{\text{ا}} - \frac{\text{مف ب}}{\text{ب}} = \text{مم ا} \times \text{مف ا} - \text{مم ب} \times \text{مف ب}$$

میں رکھنے سے معلوم ہو سکتا ہے۔ کیونکہ اِن مساواتوں سے ظاہر ہے کہ اِن میں سے کوئی ایک مساوات دیگر دو مساواتوں سے اخذ کی جا سکتی ہے۔

پس مساواتوں (۷) میں سے کوئی دو مساواتیں مع مساوات (۸) کے چھ خطاؤں میں سے تین کو متعین کرنے کے لیے کافی ہیں جبکہ دیگر تین خطائیں دی گئی ہوں اور ان میں سے کم از کم ایک خطا ضلع سے متعلق ہو۔

(۷) اور (۸) سے مف ب اور مف ج کو ساقط کرنے سے ہمیں ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جس سے مف ا حاصل ہوتا ہے مف ب، مف ج، اور مف ا کی رقوم میں؛ اس کو ضابطہ $\text{ا}^2 = \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - 2\,\text{ب ج جم ا}$ سے بھی بالراست معلوم کیا جا سکتا ہے؛ پس ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا مف ا} = (\text{ب} - \text{ج جم ا})\,\text{مف ب} + (\text{ج} - \text{ب جم ا})\,\text{مف ج} + \text{ب ج جب ا} \times \text{مف ا}$$

یہ اور اس کے متناظر دو ضابطے رشتہ (۱) کی مدد سے ذیل کی شکل میں لکھے جا سکتے ہیں۔

ا مف ا = ا جم ج × مف ب + ا جم ب × مف ج + ب ج جب ا × مف ا
ب مف ب = ب جم ا × مف ج + ب جم ج × مف ا + ج ا جب ب × مف ب ..... (۹)
ج مف ج = ج جم ب × مف ا + ج جم ا × مف ب + ا ب جب ج × مف ج

کثیر الاضلاعوں کے زاویوں اور ضلعوں کے درمیان رشتے

۱۲۷ — فرض کرو کہ کسی مستوی بند کثیر الاضلاع کے ضلع ترتیب وار ل$_1$، ل$_2$، ل$_3$ ......، ل$_n$ سے تعبیر ہوتے ہیں اور فرض کرو کہ ع$_1$، ع$_2$، ...، ع$_n$ وہ زاویے ہیں جو یہ ضلع کسی ثابت خط مستقیم کے ساتھ جو اسی مستوی میں واقع ہے بناتے ہیں اور سب کے سب ایک ہی سمت میں مثبت ناپے گئے ہیں؛ تب ظلوں کے بنیادی مسئلہ (دفعہ ۱۷) سے ثابت خط مستقیم پر اور اس کے عمود پر ظل لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

ل$_1$ جم ع$_1$ + ل$_2$ جم ع$_2$ + . . . + ل$_n$ جم ع$_n$ = ۰

ل$_1$ جب ع$_1$ + ل$_2$ جب ع$_2$ + . . . + ل$_n$ جب ع$_n$ = ۰

اب فرض کرو کہ جس ثابت خط پر ظل لیے گئے ہیں اسکو ضلع ل$_n$ بنایا (162)
گیا ہے، اگر ل$_n$ اور ل$_1$ کے درمیانی خارجہ زاویہ کو ب$_1$ سے تعبیر کریں، ل$_1$ اور ل$_2$ کے درمیانی خارجہ زاویہ کو ب$_2$ سے، وغیرہ تو

ع$_1$ = ب$_1$، ع$_2$ = ب$_1$ + ب$_2$، ع$_3$ = ب$_1$ + ب$_2$ + ب$_3$، وغیرہ، ع$_n$ = 2π

پس ل$_1$ جم ب$_1$ + ل$_2$ جم (ب$_1$ + ب$_2$) + ل$_3$ جم (ب$_1$ + ب$_2$ + ب$_3$) + ... + ل$_n$ = ۰

ل$_1$ جب ب$_1$ + ل$_2$ جب (ب$_1$ + ب$_2$) + ل$_3$ جب (ب$_1$ + ب$_2$ + ب$_3$) + ... (۱۰)
+ ل$_{n-1}$ جب (ب$_1$ + ب$_2$ + ... + ب$_{n-1}$) = ۰

یہ دو رشتے (۱۰) کثیر الاضلاع کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان بنیادی رشتے ہیں۔ اگر ضلعوں کی تعداد صرف تین ہو تو یہ رشتے (۱) اور (۲) میں تحویل ہو جاتے ہیں کیونکہ اس صورت میں ب۳ = π - ا۱، ب۲ = π - ا۲

۱۲۸ ——— (۱۰) کی پہلی مساوات میں لن کو مساوات کی دوسری جانب منتقل کرو، پھر ہر مساوات کی طرفین کا مربع لے کر جمع کرو تو نتیجہ میں

۲ لر لس کا ضر

جم (ب۱ + ب۲ + ... + بر) جم (ب۱ + ب۲ + ... + بس)

+ جب (ب۱ + ب۲ + ... + بر) جب (ب۱ + ب۲ + ... + بس)

ہو گا

یعنی جم (بر+۱ + بر+۲ + ... + بس)؛

یہ جیب التمام ہے زاویہ طرس کی جو ضلعوں لر اور لس کی مثبت سمتوں کا درمیانی زاویہ ہے؛ پس ہمیں ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔

لن² = ل۱² + ل۲² + ... + لن-۱² + ۲ ل۱ ل۲ جم ط۱۲ + ... + ۲ لر لس جم طرس + ...

، .... (۱۱)

جو ضابطہ (۳) کے مماثل ہے اور اس میں تحویل ہو جاتا ہے اگر ن = ۳۔ ضابطہ (۱۱) میں ر اور س غیر مساوی ہیں اور ہر ایک ن سے کم ہے۔

کثیر الاضلاع کا رقبہ

۱۲۹ ——— کثیر الاضلاع کا رقبہ جملہ

$\frac{1}{2}$ (ل۱ ل۲ جب ط۱۲ + ... + لر لس جب طرس + ...)، ... (۱۲)

یا $\frac{1}{2}$ Σ لر لس جب طرس سے حاصل ہوتا ہے جبکہ مجموعہ ر اور س کی تمام مختلف قیمتوں کے لیے لیا گیا ہو۔ اگر ہم مقداروں ر اور س میں سے س کو

ہمیشہ ر سے بڑا فرض کریں تو زاویہ $ط_{رس}$ حسب دفعہ سابق خارجہ زاویوں $ب_{ر+۱}$، $ب_{ر+۲}$، .... $ب_{س}$ کا حاصل جمع ہے۔ ضابطہ بالا کو ثابت کرنے کے لیے ہم پہلے یہ دکھائینگے کہ ایک مثلث کی صورت میں یہ ضابطہ جملہ $\frac{۱}{۲} ل_{۲} ل_{۳}$ جب $ا_{۱}$ میں تحویل ہوتا ہے اور پھر ہم یہ بتائینگے کہ اگر وہ، (ن-۱) ضلعوں والے کثیر الاضلاع کے لیے درست ہے تو وہ، ن ضلعوں والے کثیر الاضلاع کے لیے بھی درست ہے۔

مثلث $ا_{۱} ا_{۲} ا_{۳}$ کی صورت میں جس میں $ا_{۱} ا_{۲} = ل_{۱}$ ہمیں حاصل ہوتا ہے (163)

$$ط_{۱۲} = \pi - ا_{۲}، \quad ط_{۲۳} = \pi - ا_{۳}، \quad ط_{۱۳} = ۲\pi - ا_{۲} - ا_{۳}؛$$

پس اس صورت میں جملہ $\frac{۱}{۲} \sum ل_{ر} ل_{س}$ جب $ط_{رس}$

$$= \frac{۱}{۲}(ل_{۱} ل_{۲} \text{ جب } ا_{۲} + ل_{۲} ل_{۳} \text{ جب } ا_{۳} - ل_{۱} ل_{۳} \text{ جب } ا_{۱})$$

$$= \frac{۱}{۲} ل_{۲} ل_{۳} \text{ جب } ا_{۱}$$

اس طرح ضابطہ بالا درست ہے جبکہ ن = ۳،

اب فرض کرو کہ (ن-۱) ضلعوں

$ل_{۱}، ل_{۲}، \ldots، ل'_{ن-۱}$

والے کثیر الاضلاع کے لیے ضابطہ درست ہے، اس طرح اس کثیر الاضلاع کا رقبہ ہے

$$\frac{۱}{۲} \sum ل_{ر} ل_{س} \text{ جب } ط_{رس} + \frac{۱}{۲} ل'_{ن-۱} \sum ل_{ر} \text{ جب } ط_{ن-۱، ر}$$

جس میں ر اور س میں سے ہر ایک، ن-۱ سے کم ہے۔ اب ضلع $ل'_{ن-۱}$ کی جگہ دو ضلع $ل_{ن-۱}$، $ل_{ن}$ رکھو اور اس طرح ن ضلعوں والا ایک کثیر الاضلاع بناؤ، تب ہمیں $\frac{۱}{۲} ل_{ن-۱} ل_{ن}$ جب $ط_{ن-۱، ن}$ کو رقبۂ بالا میں جمع کرنا ہوگا؛ پس

ن ضلعوں والے کثیر الاضلاع کا رقبہ ہے

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\,\text{ل}_{\text{ر}}\text{ل}_{\text{س}}\,\text{جب}\,\text{ط}_{\text{ر س}} + \tfrac{1}{2}\text{ل}_{\text{ن-۱}}\Sigma\,\text{ل}_{\text{ر}}\,\text{جب}\,\text{ط}_{\text{ن-۱، ر}} + \tfrac{1}{2}\text{ل}_{\text{ن-۱}}\text{ل}_{\text{ن}}\,\text{جب}\,\text{ط}_{\text{ن-۱، ن}}$$

اب ضلع $\text{ل}_{\text{ن-۱}}$ کا ظل $\text{ل}_{\text{ر}}$ پہ لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ل}_{\text{ن-۱}}\,\text{جب}\,\text{ط}_{\text{ر، ن-۱}} = \text{ل}_{\text{ن-۱}}\,\text{جب}\,\text{ط}_{\text{ر، ن-۱}} + \text{ل}_{\text{ن}}\,\text{جب}\,\text{ط}_{\text{ر، ن}}$$

پس جملہ بالا ہو جاتا ہے

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\,\text{ل}_{\text{ر}}\text{ل}_{\text{س}}\,\text{جب}\,\text{ط}_{\text{ر س}} + \tfrac{1}{2}\Sigma\,\text{ل}_{\text{ر}}(\text{ل}_{\text{ن-۱}}\,\text{جب}\,\text{ط}_{\text{ر، ن-۱}} + \text{ل}_{\text{ن}}\,\text{جب}\,\text{ط}_{\text{ر، ن}})$$

$$+ \tfrac{1}{2}\text{ل}_{\text{ن-۱}}\text{ل}_{\text{ن}}\,\text{جب}\,\text{ط}_{\text{ن-۱، ن}}$$

یا $\tfrac{1}{2}\Sigma\,\text{ل}_{\text{ر}}\text{ل}_{\text{س}}\,\text{جب}\,\text{ط}_{\text{ر س}}$

جبکہ ر اور س کو ایک سے لے کر ن تک تمام مختلف قیمتیں دی جائیں ایسی کہ ر > س۔

اب ہم ثابت کر چکے ہیں کہ ضابطہ (۱۲) درست ہے جبکہ ن = ۳، اور اس لیے وہ درست ہے جبکہ ن = ۴، اور علیٰ ہذا القیاس؛ اس لیے وہ عام طور پر بھی درست ہے خواہ کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی تعداد کچھ ہی ہو۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ ضابطہ (۱۲) میں $\text{ل}_{۱}$ کا سر، (۱۰) کی دوسری مساوات کی وجہ سے معدوم ہوتا ہے، پس ضابطہ ہو جاتا ہے $\tfrac{1}{2}\Sigma\,\text{ل}_{\text{ر}}\text{ل}_{\text{س}}\,\text{جب}\,\text{ط}_{\text{ر س}}$ جہاں ر اور س، ۲ سے ن تک تمام قیمتیں اختیار کرتے ہیں ایسی کہ ہمیشہ س > ر۔

64)

دسویں باب پر مثالیں

ایک مثلث ا ب ج کے لیے حسب ذیل رشتے ازمثال ۱ تا ۱۱

ثابت کرو:-

(۱) ا جب (ب - ج) + ب جب (ج - ا) + ج جب (ا - ب) = ۰

(۲) ا^{۳} جم ا + ب^{۳} جم ب + ج^{۳} جم ج = ا ب ج (۱ + ۴ جم ا جم ب جم ج)

(۳) ا^{۲} جم ج + ج^{۲} جم ا = (ج + ا) / (۲ ب) {ب^{۲} + (ج - ا)^{۲}}

(۴) ا جم ا جم ۲ا + ب جم ب جم ۲ب + ج جم ج جم ۲ج
+ ۴ جم ا جم ب جم ج (ا جم ا + ب جم ب + ج جم ج) = ۰

(۵) ا^{۲} جم ۲ (ب - ج) = ب^{۲} جم ۲ب + ج^{۲} جم ۲ج + ۲ ب ج جم (ب - ج)

(۶) ا^{۳} جم (ب - ج) + ب^{۳} جم (ج - ا) + ج^{۳} جم (ا - ب) = ۳ ا ب ج

(۷) ج^{۳} = ا^{۳} جم ۳ب + ۳ ا^{۲} ب جم (۲ب - ا) + ۳ ا ب^{۲} جم (ب - ۲ا)
+ ب^{۳} جم ۳ا

(۸) (مم ½ ا - مس ½ ب مس ½ ج)^{½} + (مم ½ ب - مس ½ ج مس ½ ا)^{½}
+ (مم ½ ج - مس ½ ا مس ½ ب)^{½} = (مم ½ ا + مم ½ ب + مم ½ ج)^{½}

(۹) ب^{۲} + ج^{۲} - ۲ ب ج جم (ا + ۶۰°) = ج^{۲} + ا^{۲} - ۲ ج ا جم (ب + ۶۰°)
= ا^{۲} + ب^{۲} - ۲ ا ب جم (ج + ۶۰°)

اس نتیجہ کی ہندسی طور پر توضیح کرو۔

(۱۰) جم ½ ب جب (½ ب + ج) : جم ½ ج جب (½ ج + ب)
= ا + ج : ا + ب

(۱۱) (ا + ب) جب ب = ۲ ب جب (ب + ½ ج) جم ½ ج

(۱۲) ثابت کرو کہ اگر ایک مثلث کے ضلع سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو اس کے نیم زاویوں کے مماس التمام سلسلہ حسابیہ میں ہوتے ہیں۔

(۱۳) اگر ایک مثلث کے ضلعوں کے مربع سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ اس کے زاویوں کے مماس سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

(۱۴) اگر ۱ - جم ا، ۱ - جم ب، ۱ - جم ج سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ جب ا، جب ب، جب ج سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

(۱۵) اگر $\text{ب} - \text{ا} = \text{م ج}$ تو ثابت کرو کہ $\text{ا} = \text{جم}^{-1}\left(\text{م جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ج}\right) - \frac{1}{2}\,\text{ج}$

اور $\text{مم}\,\frac{1}{2}(\text{ب} - \text{ا}) = \frac{1 + \text{م جم ب}}{\text{م جب ب}}$

(۱۶) ثابت کرو کہ ایک مثلث میں $\text{جم ا} + \text{جم ب} + \text{جم ج} > 1$ اور $\ngtr \frac{3}{2}$

(۱۷) ثابت کرو کہ ایک مثلث میں $\text{مس}^2\frac{1}{2}\text{ب}\,\text{مس}^2\frac{1}{2}\text{ج} + \text{مس}^2\frac{1}{2}\text{ج}\,\text{مس}^2\frac{1}{2}\text{ا} + \text{مس}^2\frac{1}{2}\text{ا}\,\text{مس}^2\frac{1}{2}\text{ب} < 1$، اور یہ کہ اگر ایک زاویہ دو قائمہ زاویوں کے لاانتہا قریب آئے تو اس جملہ کی کم سے کم قیمت $\frac{1}{2}$ ہے۔

(۱۸) ثابت کرو کہ ایک مثلث، متساوی الاضلاع ہوگا اگر $\text{مم ا} + \text{مم ب} + \text{مم ج} = \sqrt{3}$

(165) (۱۹) اگر ایک مثلث میں

$$\text{قم ا قم ب قم ج} + 2\,\text{مم ا مم ب مم ج}$$
$$= \text{قط}\,\frac{1}{2}\text{ا}\,\text{قط}\,\frac{1}{2}\text{ب}\,\text{قط}\,\frac{1}{2}\text{ج} + 2\,\text{مس}\,\frac{1}{2}\text{ا}\,\text{مس}\,\frac{1}{2}\text{ب}\,\text{مس}\,\frac{1}{2}\text{ج}$$

تو ثابت کرو کہ اس کا ایک زاویہ 90° ہے۔

(۲۰) اگر ایک مثلث میں $\text{جم ا} = \text{جم ب جم ج}$ تو ثابت کرو کہ $\text{مم ب مم ج} = \frac{1}{2}$

(۲۱) اگر ط وہ زاویہ ہو جو $\text{جم ط} = \frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ج}}$ سے متعین ہوتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{ا} - \text{ب}) = \frac{(\text{ا} + \text{ب})\,\text{جب ط}}{2\sqrt{\text{ا ب}}}$$

اور

$$\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{ا} + \text{ب}) = \frac{\text{ج جب ط}}{2\sqrt{\text{ا ب}}}$$

(٢٢) اگر ایک تساوی الاضلاع مثلث کے اندر ایک نقطہ و ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم (ب و ج} - ٦٠^\circ) = \frac{\text{ب و}^2 + \text{ج و}^2 - ٢\ \text{و}^2}{٢\ \text{ب و} \times \text{ج و}}$$

(٢٣)۔ اگر ج = ب + ½ ا اور ب ج نقطہ و پر تقسیم ہو ایسا کہ ب و : و ج = ١ : ٣ تو ثابت کرو کہ ∠ ا ج و = ٢ ∠ ا و ج

(٢٤) اگر ایک مثلث ا ب ج کے قاعدے کے ساتھ خطوطِ مستقیم ج دَ ج ع مساوی زاویے عہ بنائیں تو ثابت کرو کہ

رقبہ ا ب ج : رقبہ ج ع د :: ج : ٢ ب جب ا مم عہ

(٢٥) اگر ا ب کو نقاط ج، د پر تقسیم کیا گیا ہو ایسا کہ ا ج = ج د = د ب اور اگر پ کوئی دوسرا نقطہ ہو تو ثابت کرو کہ

جب ا پ د جب ب پ ج = ٤ جب ا پ ج جب ب پ د

(٢٦) اگر ایک متوازی الاضلاع کے ضلع اَ، ب ہوں اور ان کا درمیانی زاویہ سہ ہو تو ثابت کرو کہ وتروں کا حاصل ضرب ہے $\{(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)^2 - ٤\ \text{ا}^2\text{ب}^2\ \text{جم}^2\ \text{سہ}\}^{\frac{1}{2}}$

(٢٧) اگر ایک مثلث کے ضلع ب ج کا نقطہ وسطی د ہو اور زاویہ ب ا د = طہ، زاویہ ج ا د = فہ تو ثابت کرو کہ مم طہ - مم فہ = مم ب - مم ج

(٢٨) ایک خط مستقیم ایک مثلث کے زاویہ ج کو دو حصوں عہ، بہ میں اور ضلع ج کو دو منقطوعوں لا، ما میں تقسیم کرتا ہے اور اس ضلع کے ساتھ زاویہ طہ پر مائل ہے۔ ثابت کرو کہ لا مم عہ - ما مم بہ = ما مم ا - لا مم ب = (لا + ما) مم طہ

(٢٩) اگر ایک مثلث کے ضلع سلسلہ حسابیہ میں ہوں اور اگر بڑے سے بڑا زاویہ چھوٹے سے چھوٹے زاویہ سے بقدر ٩٠° کے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ ضلعوں میں نسبت

√٧ + ١ : √٧ : √٧ - ١ ہے۔

(٣٠) ہندسی طور پر ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

ا جم طہ = ب جم (ج - طہ) + ج جم (ب + طہ)، جس میں طہ کوئی زاویہ ہے۔

اگر کسی مستوی ذو اربعۃ الاضلاع کے ضلعوں ا ب، ب ج، ج د کو اَ، ب، ج سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

مس ۲ ا = (ا جب ا ـ ب جب (ا ـ ب) + ج جب (ا ـ ب ـ ج)) ÷ (ا جم ا ـ ب جم (ا ـ ب) + ج جم (ا ـ ب ـ ج))

(۳۱) اگر ایک مثلث ا ب ج ایسا ہو کہ ایک خط مستقیم ا د جو ب ج کو نقطہ د پر ملتا ہے کھینچا جا سکتا ہے اس طور پر کہ د ب ا د = $\frac{1}{2}$ د ب ا ج اور نیز ب د = $\frac{1}{3}$ ب ج تو ثابت کرو کہ ا^{2} ب^{2} = (ب^{2} ـ ج^{2}) (ب^{2} + ۸ ج^{2})

(۳۲) ایک مربع کا ایک ضلع ب ج ہے اور ب ج کے عمودی ناصف پر دو نقطے پ، ق لیے گئے ہیں جو مربع کے مرکز سے مساوی فاصلے پر ہیں؛ ب پ، ج ق کو ملایا گیا ہے اور وہ ایک دوسرے کو نقطہ ا پر قطع کرتے ہیں؛ ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج میں

مس ا (مس ب ـ مس ج)^{2} + ۸ = ۰

(166) (۳۳) اگر

ما^{2} + ی^{2} ـ ۲ ما ی جم عہ = ا^{2}
ی^{2} + لا^{2} ـ ۲ ی لا جم بہ = ب^{2}　　اور　عہ + بہ + جہ = ۲ π
لا^{2} + ما^{2} ـ ۲ لا ما جم جہ = ج^{2}

تو ثابت کرو کہ

(ما ی جب عہ + ی لا جب بہ + لا ما جب جہ)^{2} = $\frac{1}{4}$ (۲ ب^{2} ج^{2} + ۲ ج^{2} ا^{2} + ۲ ا^{2} ب^{2} ـ ا^{4} ـ ب^{4} ـ ج^{4})

(۳۴) اگر ایک مثلث کے زاویے ا، ب، ج ہوں اور لا، ما، ی حقیقی مقداریں ہوں ایسی کہ وہ مساوات

(ما جب ج ـ ی جب ب) ÷ (لا ـ ما جم ج ـ ی جم ب) = (ی جب ا ـ لا جب ج) ÷ (ما ـ ی جم ا ـ لا جم ج)

کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ

لا ÷ جب ا = ما ÷ جب ب = ی ÷ جب ج

(۳۵) ثابت کرو کہ بڑے سے بڑے مستطیل کا رقبہ جو ر نصف قطر کے دائرے کے ایک قطاع میں بنایا جا سکتا ہے ر^{2} مس $\frac{1}{2}$ عہ ہے جہاں ۲ عہ، قطاع کا

زاویہ ہے۔

(۳۶) بتاؤ کہ کس طرح اقل رقبہ کا قائم الزاویہ مثلث بنایا جاسکتا ہے جس کے راس تین دیے ہوئے متوازی خطوط مستقیم پر واقع ہوں؛ اگر درمیانی خط مستقیم کے فاصلے دوسرے دو خطوں سے ا، ب ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث کا وتر متوازی خطوں کے ساتھ زاویہ $مم^{-1} \frac{ا - ب}{ا + ب}$ بناتا ہے۔

(۳۷) ایک مثلث کے ضلعوں کے طول پیمایشوں سے معلوم کیے گئے ہیں، جن میں خفیف سی خطائیں واقع ہوئی ہیں؛ ان طولوں سے مثلث کے زاویوں کا حساب لگانے سے معلوم ہوا کہ زاویے ا، ب، ج ہیں۔ اگر طولوں میں تقریبی خطائیں عہ، بہ، جہ ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے جواب میں زاویوں کے مماس التماموں کی خطائیں مقداروں

قم ا (بہ جم ج + جہ جم ب - عہ)، قم ب (جہ جم ا + عہ جم ج - بہ)

قم ج (عہ جم ب + بہ جم ا - جہ)

کے متناسب ہونگی۔

(۳۸) اگر ایک مثلث کے ضلعوں کی پیمایش میں دو ضلعوں ا، ب میں چھوٹی خطائیں لا، ما واقع ہوں تو زاویہ ج میں خطا ہوگی

$$-\left(\frac{لا}{ا} مم\ ب + \frac{ما}{ب} مم\ ا\right)$$

نیز دوسرے زاویوں کی خطائیں بھی معلوم کرو۔

(۳۹) ایک مثلث کا رقبہ اس کے ضلعوں کے طول ناپ کر معلوم کیا گیا ہے؛ اور کسی طول کے ناپنے میں ممکن الوقوع خطا کی انتہا خواہ وہ مثبت ہو یا منفی طول کی ن گنا ہے جہاں ن ایک چھوٹی مقدار ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کی صورت میں جس کے اضلاع (پیمایش کردہ) ۱۱۰، ۸۱، ۵۹ ہیں خطا کی انتہا جو اس کے رقبہ میں ممکن ہے رقبہ کی تقریباً ۳۳۴۱ء۳ ن گنا ہے۔

(۴۰) ثابت کرو کہ ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے چار زاویوں کی جیوب التمام $ج_1$، $ج_2$، $ج_3$، $ج_4$ رشتہ ذیل کو پورا کرتی ہیں:—

$$(\text{ج}_1^4+\text{ج}_2^4+\text{ج}_3^4+\text{ج}_4^4)-2(\text{ج}_1^2\,\text{ج}_2^2+\text{ج}_2^2\,\text{ج}_3^2+\text{ج}_3^2\,\text{ج}_1^2+\text{ج}_4^2\,\text{ج}_1^2+\text{ج}_4^2\,\text{ج}_2^2+\text{ج}_4^2\,\text{ج}_3^2)$$

$$+4(\text{ج}_2^2\,\text{ج}_3^2\,\text{ج}_4^2+\text{ج}_3^2\,\text{ج}_4^2\,\text{ج}_1^2+\text{ج}_4^2\,\text{ج}_1^2\,\text{ج}_2^2+\text{ج}_1^2\,\text{ج}_2^2\,\text{ج}_3^2)$$

$$+4\,\text{ج}_1\,\text{ج}_2\,\text{ج}_3\,\text{ج}_4\,(2-\text{ج}_1^2-\text{ج}_2^2-\text{ج}_3^2-\text{ج}_4^2)=0$$

(167)

گیارہواں باب

مثلثوں کا حل

۱۳۰ــــــ اب ہم پچھلے باب کے محصلہ ضابطوں کو مثلثوں کے حل کرنے میں استعمال کرینگے یعنے اس وقت جب چھ اجزا میں سے تین اجزا کی مقداریں دی گئی ہوں جن میں سے کم از کم ایک ضلع ہو تو باقی تین اجزا کی مقداریں معلوم کرتے ہیں۔ ہم بالعموم ایسے ضابطوں کا انتخاب کرینگے جن کو لوکارتموں کے ذریعہ عددی حساب لگانے میں استعمال کیا جاسکتا ہے کیونکہ صرف یہی ضابطے عمل میں مفید ہوتے ہیں۔

مثلثوں کا حل زاویوں کے دائری تفاعلوں کی عددی قیمتیں معلوم کرنے کے عمل پر منحصر کیا جاتا ہے، اب چونکہ دائری تفاعل قائم الزاویہ مثلثوں کے ضلعوں کی نسبتیں ہیں اس لیے ظاہر ہے کہ تمام مثلثوں کا حل ان مثلثوں کو قائم الزاویہ مثلثوں میں تقسیم کرکے انجام پاسکتا ہے۔

قائم الزاویہ مثلثوں کا حل

۱۳۱ــــــ فرض کرو کہ ایک مثلث کا زاویہ ج، ۹۰° ہے، تب یہ زاویہ دئے ہوئے اجزا میں سے ایک ہے اور ہم مثلث کو اُن مختلف

صورتوں میں حل کر سکتے ہیں جن میں دوسرے دو اجزا دیے گئے ہوں اور اِن میں سے کم از کم ایک جزو ضلع ہو۔

(۱) فرض کرو کہ دو ضلع و، ب دیے گئے ہیں، تب ضابطہ مس ا = $\frac{و}{ب}$ سے ا معلوم کیا جا سکتا ہے اور پھر ب، ا کا متمم زاویہ ہونے کی وجہ سے معلوم ہوتا ہے؛ نیز ج = و قم ا جس سے ج معلوم ہوتا ہے جبکہ ا معلوم کر لیا گیا ہو؛ تب اس مثلث کو حل کرنے کے لیے لوکارتمی ضابطے ہیں

ل مس ا = ۱۰ + لوک و - لوک ب،

ب = ۹۰° - ا،

لوک ج = لوک و - ل جب ا + ۱۰

(168) (۲) فرض کرو کہ وتر ج اور ایک ضلع و دیے گئے ہیں؛ تب ضابطہ جب ا = $\frac{و}{ج}$ کے ذریعہ ا معلوم کیا جاتا ہے؛ ب، ا کا متمم ہے؛ ضابطہ ب = ج جم ا، یا ب^2 = ج^2 - و^2 سے ب معلوم ہوتا ہے۔

لوکارتمی ضابطے ہیں

ل جب ا = ۱۰ + لوک و - لوک ج،

ب = ۹۰° - ا،

اور لوک ب = لوک ج + ل جم ا - ۱۰

یا لوک ب = $\frac{1}{2}$ لوک (ج + و) + $\frac{1}{2}$ لوک (ج - و)

(۳) فرض کرو کہ وتر ج اور ایک زاویہ ا دیے گئے ہیں تو ب فوراً ا کے متمم کے طور پر معلوم ہوتا ہے؛ ضابطہ و = ج جب ا سے و معلوم ہوتا ہے اور ب پچھلی صورت کے مانند حاصل ہوتا ہے۔

لوکارتمی ضابطے ہیں

لوک و = لوک ج + ل جب ا - ۱۰،

ب = ۹۰° - ا،

لوک ب = لوک ج + ل جم ا - ۱۰

یا　لوک ب = ½ لوک (ج + ا) + ½ لوک (ج - ا)

(۴) فرض کرو کہ ایک ضلع ا اور ایک زاویہ ا دیے گئے ہیں؛ تب ب ہے ۹۰° - ا، ج ہے ا قم ا، اور ب پچھلی دو صورتوں کی مانند معلوم ہوتا ہے۔

لوکارتمی ضابطے ہیں

لوک ج = لوک ا - ل جب ا + ۱۰،

ب = ۹۰° - ا،

لوک ب = لوک ج + ل جم ا - ۱۰۔

یا　لوک ب = ½ لوک (ج + ا) + ½ لوک (ج - ا)

۱۳۲ —— بعض صورتوں میں دفعہ سابق کے ضابطے سہولت بخش نہیں ہوتے مثلاً صورت (۲) میں اگر زاویہ ا، ۹۰° کے قریب ہو تو اس کو مساوات جب ا = ا/ج سے سہولت کے ساتھ معلوم نہیں کیا جاسکتا کیونکہ متصل جیوب کے لیے فرق اس صورت میں ناقابل قدر ہیں، اس لیے ہم دوسرا ضابطہ استعمال کرتے ہیں؛ دسویں باب کے مسئلہ (۴) سے ہم حاصل کرتے ہیں ب مس ½ ب = ج - ا، ب مم ½ ب = ج + ا،

پس مس² ½ ب = (ج - ا) / (ج + ا) اور اس طرح

مس (۴۵° - ½ ا) = ((ج - ا) / (ج + ا))^½

یہ ضابطہ متذکرہ صدر اعتراض سے پاک ہونے کی وجہ سے ا کے معلوم کرنے کے لیے استعمال ہو سکتا ہے۔

نیز صورتوں (۳) اور (۴) میں ضابطہ ب = ج جم ا غیر سہولت بخش ہے جبکہ ا بہت چھوٹا ہو؛ ایسی صورت میں ہم ضابطہ ب = ج - ج جب ا × مس ½ ا استعمال کر سکتے ہیں۔

(169) **۱۳۳ـــــ** قائم الزاویہ مثلثوں کے حل کے لیے متعدد تقریبی ضابطے معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ زاویوں ا، ب کے دائری ناپ عہ، بہ ہیں۔

(۱) ضابطہ ا = ج جم ب کی تقریبی شکل ہے

$$\text{ا} = \text{ج}\left(1 - \frac{1}{2}\,\text{بہ}^2 + \frac{1}{24}\,\text{بہ}^4\right)$$

جو جم ب کو ب کے دائری ناپ کی قوتوں میں پھیلانے سے اور اس پھیلاؤ کی پہلی تین رقمیں لینے سے حاصل ہوئی ہے۔ اب یہ ضابطہ ا کو تقریبی طور پر محسوب کرنے کے لئے استعمال ہو سکتا ہے جبکہ ج اور ب دیے گئے ہوں اور بہ بہت بڑا نہ ہو۔

(۲) چونکہ جب ا = $\frac{\text{ا}}{\text{ج}}$، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{عہ} - \frac{1}{6}\,\text{عہ}^3 + \frac{1}{120}\,\text{عہ}^5 = \frac{\text{ا}}{\text{ج}}\text{، تقریباً}$$

عہ کو $\frac{\text{ا}}{\text{ج}}$ کی رقوم میں حاصل کرنے کے لیے پہلے تقرب کے طور پر عہ = $\frac{\text{ا}}{\text{ج}}$ لے سکتے ہیں، دوسرے تقرب کے طور پر عہ = $\frac{\text{ا}}{\text{ج}} + \frac{1}{6}\left\{\frac{\text{ا}}{\text{ج}}\right\}^3$، اور تیسرے تقرب کے طور پر

$$\text{عہ} = \frac{\text{ا}}{\text{ج}} + \frac{1}{6}\left\{\frac{\text{ا}}{\text{ج}} + \frac{1}{6}\left(\frac{\text{ا}}{\text{ج}}\right)^3\right\}^3 - \frac{1}{120}\left(\frac{\text{ا}}{\text{ج}}\right)^5$$

یا

$$\text{عہ} = \frac{\text{ا}}{\text{ج}} + \frac{1}{6}\left(\frac{\text{ا}}{\text{ج}}\right)^3 + \left(\frac{3}{40}\right)\left(\frac{\text{ا}}{\text{ج}}\right)^5\text{،}$$

جس کو عہ کے محسوب کرنے میں استعمال کیا جا سکتا ہے۔

(۳) مساوات مس $\frac{1}{2}$ ب = $\left(\frac{\text{ج} - \text{ا}}{\text{ج} + \text{ا}}\right)^{\frac{1}{2}}$ سے تقریبی ضابطہ

$$\frac{1}{2}\,\text{بہ} = \left(\frac{\text{ج} - \text{ا}}{\text{ج} + \text{ا}}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\text{ج} - \text{ا}}{\text{ج} + \text{ا}}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{\text{ج} - \text{ا}}{\text{ج} + \text{ا}}\right)^2\right\}$$

حاصل ہو سکتا ہے۔

(۴) زاویہ کے دائری ناپ کے بارے میں اسنیلیس (Snellius) کا

ضابطہ (دیکھو مثال ۳۲ صفحہ ۲۲۴)

$$فہ = \frac{۳ \text{ جیب } ۲ \text{ فہ}}{۲ (۲ + \text{جم} ۲ \text{فہ})}$$

کو جس میں تقریبی خطا $\frac{۴}{۴۵}$ فہ^{۵} ہے استعمال کرو اور رکھو ۲ فہ = ب تو ہمیں ضابطہ حاصل ہوتا ہے ب = $\frac{۳ ب}{۲ج + ا}$ اور تقریبی خطا ہے $\frac{۱}{۱۸۰}$ ب^{۵}

پس ب، اس تقریبی مساوات

$$ب = \frac{۳ ب}{۲ج + ا} \times ۵۷٫۲۹۵۷^{\circ}$$

سے درجوں میں حاصل ہوتا ہے۔

غیر قائم الزاویہ مثلثوں کا حل

۱۳۴ ——— مثلث کو حل کرنا جب تین ضلع دیے جائیں۔

ضابطوں

$$جیب \tfrac{۱}{۲} ا = \left\{ \frac{(س - ب)(س - ج)}{ب ج} \right\}^{\frac{۱}{۲}} ،$$

$$جم \tfrac{۱}{۲} ا = \left\{ \frac{س (س - ا)}{ب ج} \right\}^{\frac{۱}{۲}} ،$$

$$مس \tfrac{۱}{۲} ا = \left\{ \frac{(س - ب)(س - ج)}{س (س - ا)} \right\}^{\frac{۱}{۲}} ،$$

میں سے کوئی ایک ضابطہ مع دیگر زاویوں کے متناظر ضابطوں کے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ یہ سب ضابطے لوگارثمی عمل حساب کے لیے موزوں ہیں۔

(170)

مثال

ایک مثلث کے ضلع ۴، ۷، ۹ کے متناسب ہیں۔ اس کے زاویے معلوم کرو جبکہ حسب ذیل لوگارتم دیے گئے ہوں:—

لوگ ۲ = ۳۰۱۰۳۰ء

ل مس ۱۲° ۳۶′ = ۹ء۳۴۹۳۲۹، فرق ۱′ کے لیے = ۰۰۰۵۹۳ء

ل مس ۲۴° ۵′ = ۹ء۶۵۰۲۸۱، فرق ۱′ کے لیے = ۰۰۰۳۳۹ء

چونکہ س = ۱۰، س − ا = ۶، س − ب = ۳، س − ج = ۱، اس لیے

مس $\frac{۱}{۲}$ ا = $\sqrt{\frac{۱}{۲۰}}$، مس $\frac{۱}{۲}$ ب = $\sqrt{\frac{۲}{۱۰}}$، اس طرح

ل مس $\frac{۱}{۲}$ ا = ۱۰ − $\frac{۱}{۲}$(۱ + ۳۰۱۰۳۰ء) = ۹ء۳۴۹۴۸۵

اور ل مس $\frac{۱}{۲}$ ب = ۱۰ + $\frac{۱}{۲}$(۳۰۱۰۳۰ء − ۱) = ۹ء۶۵۰۵۱۵

ا معلوم کرنے کے لیے چونکہ ۹ء۳۴۹۴۸۵ − ۹ء۳۴۹۳۲۹ = ۰۰۰۱۵۶ء

اور $\frac{۱۵۶}{۵۹۳}$ × ۶۰″ = ۱۵ء۸″ تقریباً، اس لیے $\frac{۱}{۲}$ ا = ۱۲° ۳۶′ ۱۵ء۸″ یا
ا = ۲۵° ۱۲′ ۳۱ء۶″

ب معلوم کرنے کے لیے چونکہ ۹ء۶۵۰۵۱۵ − ۹ء۶۵۰۲۸۱ = ۰۰۰۲۳۴ء

اور $\frac{۲۳۴}{۳۳۹}$ × ۶۰″ = ۴۱ء۴″ تقریباً، اس لیے $\frac{۱}{۲}$ ب = ۲۴° ۵′ ۴۱ء۴″ یا
ب = ۴۸° ۱۱′ ۲۲ء۸″؛ نیز ج = ۱۸۰° − ا − ب = ۱۰۶° ۳۶′ ۵ء۶″، اس طرح زاویوں کی تقریبی قیمتیں حاصل ہو گئیں۔

۱۳۵ — مثلث حل کرنا جب دو ضلع اور ان کا درمیانی زاویہ دیے جائیں۔

فرض کرو کہ ب، ج اور ا دیے ہوئے اجزا ہیں، تب ب اور ج ضابطہ

مس $\frac{۱}{۲}$(ب − ج) = $\frac{\text{ب} - \text{ج}}{\text{ب} + \text{ج}}$ ظم $\frac{۱}{۲}$ ا

اور ضابطہ ب + ج = ۱۸۰° - ا

سے متعین کیے جا سکتے ہیں۔ لوکارتمی ضابطہ ہے

ل مس ½ (ب - ج) = لوک (ب - ج) - لوک (ب + ج) + ل مم ½ ا ،

ب، اور ج معلوم کر لینے کے بعد ضلع ﻟ ان تین ضابطوں

لوک ﻟ = لوک ج + ل جب ا - ل جب ج ،

لوک ﻟ + ل جم ½ (ب - ج) = لوک (ب + ج) + ل جب ½ ا ،

لوک ﻟ + ل جب ½ (ب - ج) = لوک (ب - ج) + ل جم ½ ا ،

میں سے کسی ایک سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

ہم ﻟ کو اس طرح بھی معلوم کر سکتے ہیں: چونکہ ﻟ² = ب² + ج² - ۲ ب ج جم ا

یعنے ﻟ² = (ب + ج)² - ۴ ب ج جم² ½ ا

اس لیے ﻟ = (ب + ج) جم فہ ، جہاں فہ مساوات

جب فہ = ۲ √(ب ج) جم ½ ا / (ب + ج)

(۱۷۲) سے معلوم ہوتا ہے۔ اس طرح ہم پہلے فہ کو لوکارتمی ضابطہ

ل جب فہ = لوک ۲ + ½ لوک ب + ½ لوک ج + ل جم ½ ا - لوک (ب + ج)

سے معلوم کر سکتے ہیں اور پھر ﻟ کو ضابطہ

لوک ﻟ = لوک (ب + ج) + ل جم فہ - ۱۰

سے۔

مثال

اگر ﻟ = ۱۲۳ ، ج = ۹۹ ، اور ب = ۲۹° ۱۶′ تو ا ، ج ، ب معلوم کرو۔

یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۹۹ = ۱٫۹۹۵۶۳۵۲ ، ل جب ۲۹° ۱۶′ = ۹٫۶۸۹۱۹۷۸

لوک ۱۲۳ = ۲٫۰۸۹۹۰۵۱ ، ل جب ۵° ۴۲′ = ۹٫۴۳۲۲۲۸۵ ، فرق ۱′ کیلئے = ۱۲۶٫۸

لوک ۲۲۲۰ = ۳٫۳۴۶۳۵۳۰ ، ل جم ۴° ۳۸′ = ۱۰٫۰۰۱۴۲۸۵

لوک ۲۲۲۱ = ۳٫۳۴۶۵۶۸۹ ، ل مس ۵۹° ۶′ = ۱۰٫۲۲۳۴۵۵۲ ، فرق ۱′ کیلئے = ۲۷٫۸۳

ہمیں حاصل ہوتا ہے

ل مس ½ (ج - ا) = ل مم ۴۸° ۳۸′ + لوک ۹۹ - لوک ۲۲۲

= ۱۰٫۰۵۸۳۱۹۰۱ + ۱٫۹۹۵۶۳۵۲ - ۲٫۳۴۶۳۵۳۰

= ۱۰٫۲۳۳۲۴۷۲۳

اب ۱۰٫۲۳۳۲۴۷۲۳ - ۱۰٫۲۳۳۲۴۵۵۲ = ۰٫۰۰۰۰۱۷۱، اور ۱۷۱ / ۴۸٫۲۷ =
۳٫۵ تقریباً، اس لیے ½ (ج - ا) = ۵۹° ۳۹′ ۵٫۳″، نیز ½ (ج + ا) = ۵° ۴۲′

اس لیے ا = ۵° ۴۲′ ۵٫۶۷″، ج = ۳۵° ۱′ ۵٫۴″

نیز لوک ب = ۱۹٫۹۸۹۱۹۷۸ + ۲٫۰۸۹۹۰۵۱ - ل جب ۵° ۴۲′ ۵٫۶۷″

اور ۵٫۶۷ × ۷٫۴۸۶ = ۴۲٫۳۰۱۵۵، اس لیے ل جب ۵° ۴۲′ ۵٫۶۷″ = ۹٫۴۳۲۷۰۱۸

اس لیے لوک ب = ۲٫۳۴۶۳۵۱۴ یعنے ب = ۲۲۲ - ۱۶ / ۱۹۵۶ = ۲۲۱٫۹۹۲

۱۳۶ — مثلث کو حل کرنا جبکہ دو ضلع اور ان میں سے ایک کے مقابل کا زاویہ دیے جائیں۔

یہ بالعموم مبہم صورت کے طور پر مشہور ہے۔

فرض کرو کہ ا، ج، اور ا دیے ہوئے اجزا ہیں تو جب ج مساوات جب ج = ج/ا جب ا سے متعین ہوتا ہے؛ جب ج کو اس طرح معلوم کرنے کے بعد اگر ج جب ا > ا تو ج کی بالعموم دو قیمتیں ۱۸۰° سے کم ایک حادہ اور دوسری منفرجہ ہونگی جن کی جیب حاصل کردہ جیب کے مساوی ہوگی؛ پس ہمیں تین صورتوں پر غور کرنا چاہیے۔

(۱) اگر ج جب ا > ا تو جب ج > ا جو ناممکن ہے اور اس حقیقت کا اظہار کرتا ہے کہ کوئی مثلث ایسا نہیں ہے جو دیے ہوئے اجزا رکھتا ہو۔

(۲) اگر ج جب ا = ا تو جب ج = ۱ اور اس لیے ج کی صرف ایک قیمت ۹۰° ہے۔ اگر ا < ۹۰ تو دیے ہوئے اجزا کے ساتھ ایک مثلث موجود ہوگا اور یہ مثلث قائم الزاویہ مثلث ہوگا۔ لیکن اگر ا > ۹۰° تو ج کی قیمت

ناقابلِ قبول ہوگی اور کوئی مثلث دیے ہوئے اجزا کے ساتھ موجود نہ ہوگا۔ (172)

(۳) اگر ج جب ا < ء تو جب ج < ۱ اور اس لیے ج کی دو قیمتیں ہیں ایک حادہ اور ایک منفرجہ، پس

(ء) اگر ج < ء تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے ج < ا، اس لیے ج حادہ ہونا چاہیے، اس طرح دیے ہوئے اجزا کے ساتھ صرف ایک مثلث موجود ہوگا؛

(ب) اگر ج > ء تو ج کا حادہ ہونا ضروری نہیں ہے اور اس کی دونوں قیمتیں قابل قبول ہیں بشرطیکہ ا < ۹۰°؛ لیکن اگر ا > ۹۰° تو دونوں قیمتیں ناقابل قبول ہیں کیونکہ ج > ا۔ اس لیے دیے ہوئے اجزا کے ساتھ دو مثلث ہونگے اگر ا < ۹۰° اور کوئی مثلث نہ ہوگا اگر ا > ۹۰°؛

(ج) اگر ج = ء تو ج = ا یا ۱۸۰° - ا؛ ج کی قیمت ۱۸۰° - ا کے لیے مثلث کے دو ضلع ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اس لیے ایسی صورت میں مثلث موجود نہ ہوگا، اس طرح ج کی صرف پہلی قیمت یعنے ا رہ جاتی ہے جس سے محدود رقبہ کا ایک مثلث ملیگا بشرطیکہ ا < ۹۰°۔

ہم نتائج محصلہ بالا کو اس طرح بیان کرسکتے ہیں:-

اگر ج جب ا > ء، کوئی حل نہیں

ج جب ا = ء، ا < ۹۰°، ایک حل

ج جب ا = ء، ا > ۹۰°، کوئی حل نہیں

ج جب ا < ء،
- ج < ء، ایک حل
- ج = ء، ا < ۹۰°، ایک حل
- ج = ء، ا > ۹۰°، کوئی حل نہیں
- ج > ء، ا < ۹۰°، دو حل
- ج > ء، ا > ۹۰° کوئی حل نہیں

اگر ج، ۹۰° کے قریب ہو تو اس کو اس کی جیب کے ذریعہ صحیح طور پر معلوم نہیں کیا جاسکتا، ایسی صورت میں ضابطوں

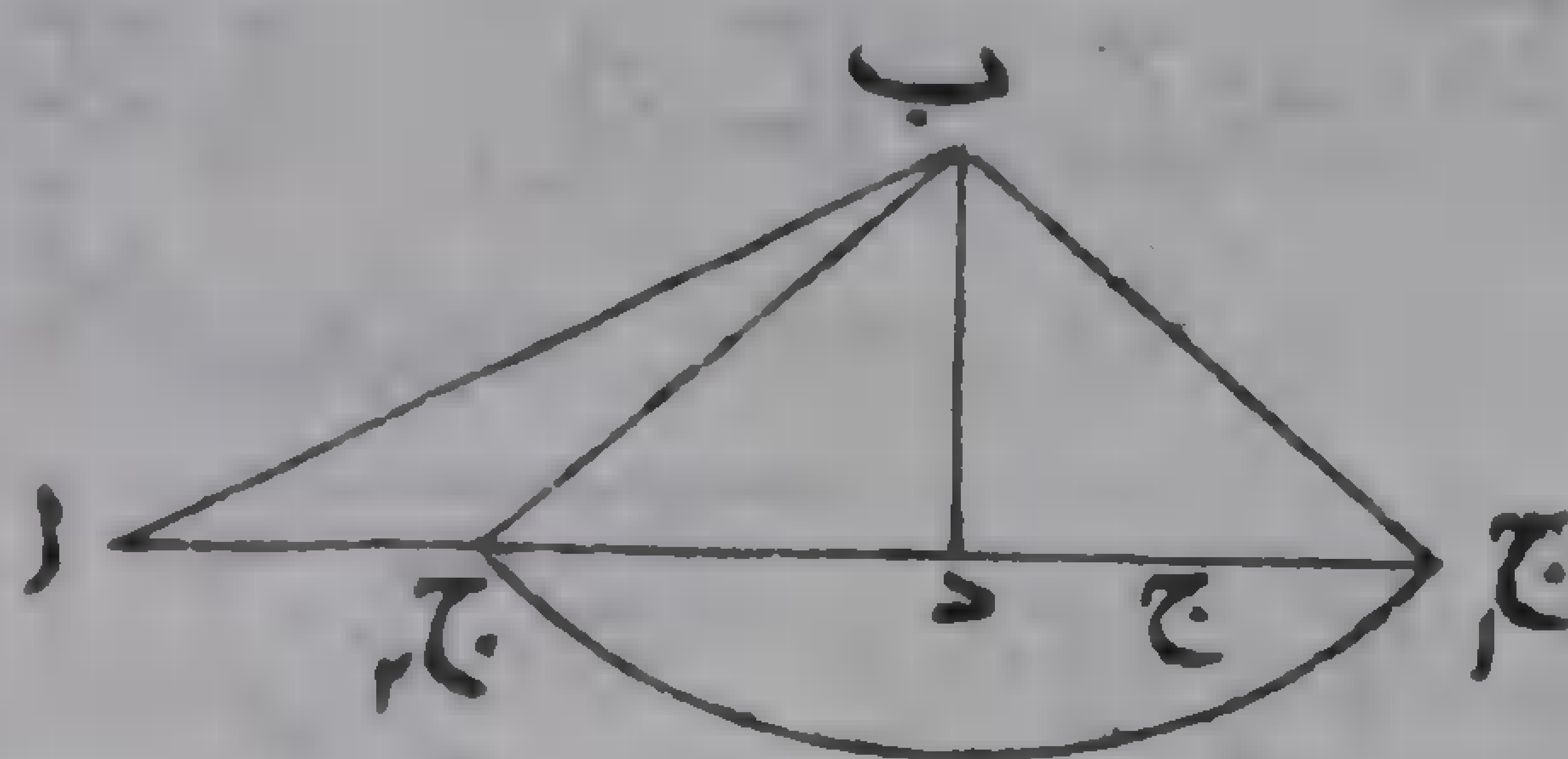
$$\text{مس ج} = \pm \frac{\text{ج جب ا}}{\sqrt{(\text{ا} + \text{ج جب ا})(\text{ا} - \text{ج جب ا})}} \text{ ، مس } (45^\circ + \tfrac{1}{2}\text{ج}) = \pm \sqrt{\frac{\text{ا} + \text{ج جب ا}}{\text{ا} - \text{ج جب ا}}}$$

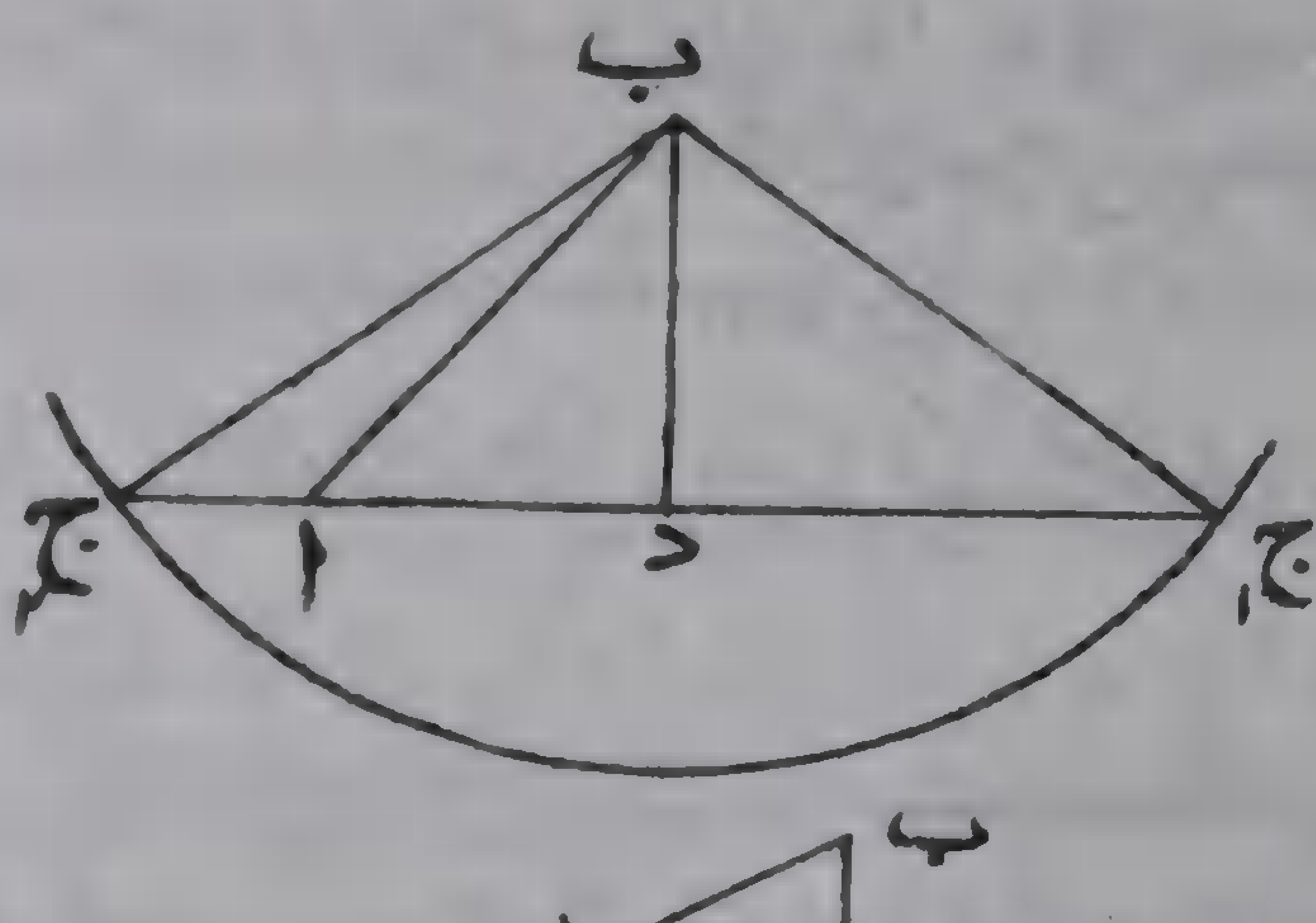
میں سے کوئی ایک استعمال ہو سکتا ہے۔

۱۳۷ — دفعۂ ماسبق میں جن مختلف صورتوں پر بحث کی گئی ہے ان کی تحقیق ہندسی طور پر کرنا سبق آموز ہوگا۔

ضلع ب پر ب سے عمود ب د کھینچو؛ تب ب د = ج جب ا، ب کو مرکز اور ا کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچو؛ تب اگر ا < ج جب ا تو یہ دائرہ ضلع ا ج کو قطع نہیں کریگا اور اس لیے دیے ہوئے اجزا کے ساتھ کوئی مثلث نہیں کھینچا جا سکتا؛ لیکن اگر ا > ج جب ا تو یہ دائرہ ضلع ا ج کو دو نقطوں ج۱ اور ج۲ پر قطع کرتا ہے۔ اگر ا < ج اور ا < ۹۰° تو ج۱ اور ج۲ دونوں ا کی ایک ہی جانب ہیں (دیکھو شکل (۱)) اور دو مثلثوں ا ب ج۱ اور ا ب ج۲ میں سے ہر ایک،

173)







دیے ہوئے اجزا رکھتا ہے؛ زاویے اج ب اور اج ب متمم ہیں اگر ا < ج مگر ا > ۹۰° تو ا ج کے پرے ہوگا اور کوئی مثلث دیے ہوئے اجزا کے ساتھ موجود نہ ہوگا۔ اگر ا > ج تو ج اور ج، ا کی متقابل جانبوں پر ہونگے اور صرف مثلث اب ج میں دیے ہوئے اجزا ہونگے۔ اس آخری صورت میں مثلث اب ج میں ا پر کا زاویہ ا کے مساوی نہیں ہوگا بلکہ ۱۸۰°-ا کے، اور اس لیے دی ہوئی شرطوں کو پورا نہیں کریگا۔

اگر ا = ج جب ا تو دائرہ اج کو نقطہ د پر مس کریگا اور قائم الزاویہ مثلث اد ب مطلوبہ مثلث ہوگا جس میں دیے ہوئے اجزا ہونگے بشرطیکہ ا < ۹۰°۔

یہ قابل ذکر ہے کہ چونکہ (شکل (۱))

اد = ج جم ا اور ج د = ج د = $\sqrt{}$ ا^{2} - ج^{2} جب^{2} ا

اس لیے ب کی دو قیمتیں یہ ہیں۔

ج جم ا + $\sqrt{}$ ا^{2} - ج^{2} جب^{2} ا اور ج جم ا - $\sqrt{}$ ا^{2} - ج^{2} جب^{2} ا

یہ قیمتیں دونوں مثبت ہونگی جبکہ دو حل ہوں؛ ب کی ان دو قیمتوں کو ہم حسب ذیل ب کی دو درجی مساوات سے بھی حاصل کر سکتے ہیں:-

ا^{2} = ب^{2} + ج^{2} - ۲ ب ج جم ا

۱۳۸ — مثلث کو حل کرنا جبکہ ایک ضلع اور دو زاویے دیے جائیں۔ (174)

فرض کرو کہ دیا ہوا ضلع ا ہے اور دیے ہوئے زاویے ا، ج؛ تب مساوات ب = ۱۸۰° - ا - ج سے ب کا تعین ہوتا ہے اور ضابطوں

لوک ب = لوک ا + ل جب ب - ل جب ا،

لوک ج = لوک ا + ل جب ج - ل جب ا،

سے ضلع ب اور ج معلوم ہوتے ہیں۔

مثال

اگر ا = ۱۰، ا = ۵۱° ۳۰' ۴۰''، ب = ۷۶° تو ب معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۱۲۳۹۶ = ۱٫۰۹۳۲۸۱۶۴، ل جب ۷۶° = ۹٫۹۸۶۹۰۴۱،

لوک ۱۲۳۹۷ = ۱٫۰۹۳۳۱۶۶۴، ل جب ۵۱° ۳۰' = ۹٫۸۹۳۵۴۴۴،

ل جب ۵۱° ۳۱' = ۹٫۸۹۳۶۴۴۸

ہمیں حاصل ہوتا ہے

لوک ب = ۱ + ۹٫۹۸۶۹۰۴۱ - ل جب ۵۱° ۳۰' ۴۰''

اب چونکہ ل جب ۵۱° ۳۰' ۴۰'' = ۹٫۸۹۳۵۴۴۴ + $\frac{۴۰}{۶۰}$ × ۰٫۰۰۰۱۰۰۴

= ۹٫۸۹۳۶۱۱۳

اس لیے لوک ب = ۱٫۰۹۳۲۹۲۸، اور اس لیے ب = ۱۲٫۳۹۶ + $\frac{۱۱۲}{۳۵۰}$ × ۰٫۰۰۱

یا ب = ۱۲٫۳۹۶۳ تقریباً

۱۳۹ ——— جملہ ج جم ا ± $\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ج}^2\,\text{جب}^2\,\text{ا}}$ جو ب کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہے لوکارثمی عمل حساب کے لیے موزوں بنایا جا سکتا ہے؛

فرض کرو جب فہ = $\frac{\text{ج}}{\text{ا}}$ جب ا تو ب = $\frac{\text{ا جب (فہ ± ا)}}{\text{جب ا}}$،

پس مساوات ل جب فہ = ل جب ا + لوک ج - لوک ا سے فہ معلوم کرنے کے بعد مساوات لوک ب = لوک ا + ل جب (فہ ± ا) - ل جب ا سے ب معلوم کیا جا سکتا ہے۔

زاویوں ا، ب، ج کے دائری ناپ علی الترتیب ء، ب، چہ سے

تعبیر کیے گئے ہوں تو مثلثوں کے حل کے لیے حسب ذیل تقریبی ضابطے حاصل ہوتے ہیں :-

(۱) فرض کرو کہ ا ، ج ، و دیے گئے ہیں اور ج بڑا نہیں ہے ، تب ضابطہ

$$\text{ج} = \frac{\text{ا جب ج}}{\text{جب ا}}$$ سے ہمیں یہ تقریبی ضابطہ

$$\text{ج} = \text{ا قم ا} \left\{ \text{جہ} - \frac{1}{6}\,\text{جہ}^3 + \frac{1}{120}\,\text{جہ}^5 \right\}$$

ملتا ہے ۔ نیز اگر ا ، ج دونوں بڑے نہ ہوں تو

$$\text{ج} = \frac{\text{ا}\left(\text{جہ} - \frac{1}{6}\,\text{جہ}^3 + \frac{1}{120}\,\text{جہ}^5 - \dots\right)}{\text{عہ} - \frac{1}{6}\,\text{عہ}^3 + \frac{1}{120}\,\text{عہ}^5 - \dots}$$

پس $$\text{ج} = \text{ا}\,\frac{\text{جہ}}{\text{عہ}} \left\{ 1 + \frac{1}{6}\left(\text{عہ}^2 - \text{جہ}^2\right) \right\}$$

سے ج تقریبی طور پہ حاصل ہوتا ہے اور اس کو ج کے محسوب کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ ا ، ج ، ا حسب سابق دیے گئے ہیں ؛ نیز فرض کرو کہ ج تقریباً °۹۰ ہے تب $\text{ج} = \frac{\text{ا جم جہَ}}{\text{جب ا}}$ ؛ اس لیے جلد $\text{ج} = \frac{\text{ا}}{\text{جب ا}} \left(1 - \frac{1}{2}\,\text{جہَ}^2 + \frac{1}{24}\,\text{جہَ}^4\right)$ ، ج کو تقریبی طور پہ متعین کرنے کے لیے استعمال ہو سکتا ہے۔

اگر ا اور ج دونوں °۹۰ کے قریب ہوں تو (176)

$$\text{ج} = \frac{\text{ا جم جہَ}}{\text{جم عہَ}} \quad \text{یا} \quad \text{ج} = \frac{\text{ا}\left(1 - \frac{1}{2}\,\text{جہَ}^2 + \dots\right)}{1 - \frac{1}{2}\,\text{عہَ}^2 + \dots}$$

اس لیے $$\text{ج} = \text{ا} \left\{ 1 - \frac{1}{2}\left(\text{جہَ}^2 - \text{عہَ}^2\right) \right\}$$

سے ج تقریبی طور پر حاصل ہوتا ہے۔

۱۴۰ — اب ہم مثلثوں کے حل کی چند مثالیں دینگے جبکہ ضلعوں اور زاویوں کی بجائے دوسرے مفروضات ہوں۔

(۱) فرض کرو کہ راسوں سے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے ہوئے عمود دیے گئے ہیں؛ ان کو ع_1، ع_2، ع_3 سے تعبیر کرو، تب

$\text{ا} \times \text{ع}_1 = \text{ب} \times \text{ع}_2 = \text{ج} \times \text{ع}_3 =$ مثلث کے رقبہ کا دوچند۔ اب چونکہ

$$\text{جم} \tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{\frac{\text{س}(\text{س}-\text{ا})}{\text{ب ج}}}$$

اس لیے

$$\text{جم} \tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{\frac{(\text{ع}_2\text{ع}_3+\text{ع}_3\text{ع}_1+\text{ع}_1\text{ع}_2)(-\text{ع}_2\text{ع}_3+\text{ع}_3\text{ع}_1+\text{ع}_1\text{ع}_2)}{4\text{ع}_1^2\text{ع}_2\text{ع}_3}}$$

اس سے ا معلوم ہوتا ہے۔ نیز $\text{ع}_2 = \text{ج جب ا}$، اس لیے ا معلوم ہونے کے بعد ج معلوم ہوتا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ مثلث کے زاویے اور اس کا گھیرا دیے گئے ہیں۔ تب

$$\text{س} = \text{ر}(\text{جب ا} + \text{جب ب} + \text{جب ج})$$

پس ر معلوم ہوتا ہے اور پھر اضلاع بالترتیب

$$\text{۲ر جب ا}،\ \text{۲ر جب ب}،\ \text{۲ر جب ج}$$

کے مساوی ہیں یا $\text{ا} = \dfrac{\text{۲س جب ا}}{\text{جب ا} + \text{جب ب} + \text{جب ج}}$

مع ب اور ج کی متناظر قیمتوں کے۔ ا کی یہ قیمت

$$\frac{\text{س جب} \tfrac{1}{2}\text{ا}}{\text{جم} \tfrac{1}{2}\text{ب جم} \tfrac{1}{2}\text{ج}}$$

بس تحویل ہوتی ہے جو لوگارثمی عمل حساب کے لیے موزوں ہے۔

(۳) فرض کرو کہ قاعدہ، ارتفاع، اور قاعدے پر کے زاویوں کا فرق دیے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ قاعدہ ا ہے، ارتفاع ع، اور دیا ہوا فرق $\text{ب} - \text{ج} = 2\,\text{عہ}$؛ تب

چونکہ $\text{ب} + \text{ج} = 180^\circ - \text{ا}$، اس لیے $\text{ب} = 90^\circ + \text{عہ} - \frac{1}{2}\text{ا}$، $\text{ج} = 90^\circ - \text{عہ} - \frac{1}{2}\text{ا}$،

نیز $\text{ا} = \text{ع}\,(\text{مم ب} + \text{مم ج}) = \text{ع}\left\{\text{مس}\left(\frac{1}{2}\text{ا} - \text{عہ}\right) + \text{مس}\left(\frac{1}{2}\text{ا} + \text{عہ}\right)\right\}$

اس لیے $\dfrac{\text{ا}}{\text{ع}} = \dfrac{2\,\text{جب ا}}{\text{جم ا} + \text{جم}\,2\,\text{عہ}}$، پس دو درجی مساوات

$$\text{ا}^2\,(\text{جم ا} + \text{جم}\,2\,\text{عہ})^2 = 4\,\text{ع}^2\,(1 - \text{جم}^2\,\text{ا})$$

یا
$$\text{جم}^2\,\text{ا}\,(\text{ا}^2 + 4\,\text{ع}^2) + 2\,\text{ا}^2\,\text{جم}\,2\,\text{عہ}\,\text{جم ا} = 4\,\text{ع}^2 - \text{ا}^2\,\text{جم}^2\,2\,\text{عہ}$$

سے جم ا حاصل ہوتا ہے۔ اس دو درجی کا حل ہے

$$\text{جم ا} = -\frac{\text{ا}^2\,\text{جم}\,2\,\text{عہ}}{\text{ا}^2 + 4\,\text{ع}^2} \pm \frac{2\,\text{ع}\,(4\,\text{ع}^2 + \text{ا}^2\,\text{جب}^2\,2\,\text{عہ})^{\frac{1}{2}}}{\text{ا}^2 + 4\,\text{ع}^2}$$

اس طرح جم ا کی دو قیمتیں، مسئلہ کے دو حل کے جواب میں، حاصل ہوتی ہیں۔

معطیات ذیل سے مثلث کو حل کرو:-

(۴) ج، ج، ا + ب

(۵) ب، ا، ب + ج

(۶) رقبہ اور زاویے

(۷) ج، ج + ا، ج + ب

(۸) زاویے اور ارتفاع

کثیر الاضلاعوں کا حل

۱۴۱ — کارنٹ[۱]، لہولیر[۲]، لیکسل[۳] اور دیگر علماء ریاضی نے اُن رشتوں پر جو کثیر الاضلاعوں کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان پائے جاتے ہیں اور اُن طریقوں پر بحث کی ہے جو کثیر الاضلاع کو حل کرنے کے لیے ہیں جبکہ ضلعوں اور زاویوں کی کچھ تعداد دی گئی ہو علم الکثیر الاضلاع (polygonometry) کے دو بنیادی ضابطے دفعہ ۱۲۷ میں بیان کیے جا چکے ہیں۔

ن ضلعوں والے کثیر الاضلاع کی تعیین کے لیے اس کے ۲ ن اجزاء میں سے (۲ ن-۳) اجزاء دیے جانے چاہئیں جن میں سے کم از کم (ن-۲) اضلاع ہونے چاہئیں۔ اس کو ثابت کرنے کے لیے فرض کرو کہ کثیر الاضلاع کو ایک وتر کے ذریعہ ایک مثلث اور (ن-۱) ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع میں تقسیم کیا گیا ہے؛ اگر اس آخری کثیر الاضلاع کے ضلعوں اور زاویوں کی تعیین ہو جاتی تو چونکہ مثلث کا ایک ضلع اس کثیر الاضلاع کے ایک ضلع کے طور پر معلوم ہو چکا ہوتا ایسے مثلث کے صرف دو اجزا کا معلوم ہونا درکار ہوتا تاکہ ن ضلعوں والے کثیر الاضلاع کی پوری طرح تعیین ہو جائے؛ پس ن ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع کی تعیین کے لیے ن-۱ ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع کی تعیین کی بہ نسبت دو اور اجزاء معلوم ہونا چاہیئے۔ اب چونکہ کثیر الاضلاع کی سادہ ترین شکل ایک مثلث ہے اور مثلث کی تعیین کے لیے اس کے تین اجزاء معلوم ہونا چاہیئے جن میں سے ایک

---

[۱] Carnot, *geometrie der Stellung*

[۲] L' Huilier, *Polygonometrie*. Geneva. 1789

[۳] Lexell, *Nov. comm. Petrop.* vols. xix. xx

ضلع ہو اس لیے ن ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع کی تعیین کے لیے ۳ + ۲ (ن - ۳) یعنے (۲ ن - ۳) اجزا دیے جانے چاہئیں۔ ان (۲ ن - ۳) اجزا میں سے اگر صرف (ن - ۳) ضلع ہوں تو ن زاویے دیے جائینگے؛ لیکن اگر (ن - ۱) زاویے دیے گئے ہوں تو ن واں زاویہ معلوم ہو سکتا ہے اس لیے گویا صرف (۲ ن - ۴) غیر تابع اجزا دیے گئے ہیں اور یہ ناکافی ہیں۔ اس لیے کل اجزا میں سے کم از کم (ن - ۲) اجزا ضلع ہونے چاہئیں۔

بعض صورتوں میں کثیر الاضلاع کو وتروں کے ذریعہ مثلثوں میں تقسیم کر کے اس کو آسانی سے حل کیا جا سکتا ہے، اس میں وتروں کو محسوب کرنا پڑتا ہے؛ تاہم یہ طریقہ ہمیشہ سہولت بخش نہیں ہوتا جیسا کہ ایک ذو اربعۃ الاضلاع کی صورت پر غور کرنے سے معلوم ہوگا جبکہ اس کے تین زاویے اور دو متقابلہ ضلع دیے گئے ہوں۔

۱۴۲ — ن ضلعی کثیر الاضلاع حل کرنا جبکہ (ن - ۱) ضلع اور (ن - ۲) زاویے دیے جائیں۔

(۱) فرض کرو کہ معلوم شدنی زاویے معلوم شدنی ضلع کے متصل ہیں۔ ہم دفعہ ۱۲۷ کے مطابق ضلعوں کے درمیان خارجہ زاویوں کی
(۱۲۲) بجائے $\text{ب}_۱$، $\text{ب}_۲$، ......، $\text{ب}_ن$ استعمال کرینگے؛ فرض کرو کہ ضلع $\text{ل}_ن$ معلوم شدنی ہے، تب دفعہ ۱۲۷ کی مساواتوں (۱۰) میں سے دوسری مساوات کی رو سے

$$\text{جب}\,\text{ب}_۱ \left\{ \text{ل}_۱ + \text{ل}_۲\,\text{جم}\,\text{ب}_۲ + \text{ل}_۳\,\text{جم}(\text{ب}_۲ + \text{ب}_۳) + \cdots\cdots + \text{ل}_{ن-۱}\,\text{جم}(\text{ب}_۲ + \cdots + \text{ب}_{ن-۱}) \right\}$$

$$= -\text{جم}\,\text{ب}_۱ \left\{ \text{ل}_۲\,\text{جب}\,\text{ب}_۲ + \text{ل}_۳\,\text{جب}(\text{ب}_۲ + \text{ب}_۳) + \cdots\cdots + \text{ل}_{ن-۱}\,\text{جب}(\text{ب}_۲ + \cdots\cdots + \text{ب}_{ن-۱}) \right\}$$

$$\text{پس}\ \ \text{مس}\,\text{ب}_۱ = \frac{\text{ل}_۲\,\text{جب}\,\text{ب}_۲ + \text{ل}_۳\,\text{جب}(\text{ب}_۲ + \text{ب}_۳) + \cdots + \text{ل}_{ن-۱}\,\text{جب}(\text{ب}_۲ + \cdots + \text{ب}_{ن-۱})}{\text{ل}_۱ + \text{ل}_۲\,\text{جم}\,\text{ب}_۲ + \text{ل}_۳\,\text{جم}(\text{ب}_۲ + \text{ب}_۳) + \cdots + \text{ل}_{ن-۱}\,\text{جم}(\text{ب}_۲ + \cdots + \text{ب}_{ن-۱})}$$

اس سے ب۱، دیے ہوئے زاویوں ب۲، ب۳، ... بن، اور دیے ہوئے ضلعوں ل۱، ل۲، ... لن۔۱ کی رقوم میں معلوم ہوتا ہے؛ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ یہ مساوات، غیر معلوم ضلع کے عمود پر ضلعوں کا ظل لینے سے حاصل کی گئی ہے؛ باقی زاویہ بن، رشتہ ب۱ + ب۲ + ... + بن = ۲π سے معلوم ہوتا ہے۔

ب۱ اور بن معلوم کرنے کے بعد ضلعوں کا لن پر ظل لینے سے جو مساوات

لن = − { ل۱ جم ب۱ + ل۲ جم (ب۱ + ب۲) + ...}

حاصل ہوتی ہے اس سے لن کی تعیین ہو سکتی ہے یا دفعہ ۱۲۸ کی مساوات (۱۱) کی مدد سے، جس میں لن کو دوسرے ضلعوں کے مربعوں اور ضلعوں اور ضلعوں کے درمیانی زاویوں کی جیوب التمام کے حاصل ضربوں کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ معلوم شدنی زاویے ایک دوسرے کے متصل ہیں مگر معلوم شدنی ضلع کے متصل نہیں ہیں۔ فرض کرو کہ لن معلوم شدنی ضلع ہے اور بر، بر+۱ معلوم شدنی زاویے۔

تب بر + بر+۱ = ۲π − (ب۱ + ب۲ + ... + بر−۱ + بر+۲ + ... + بن)،

اس طرح بر + بر+۱ معلوم ہوتا ہے؛ نیز مساواتوں (۱۰) میں سے دوسری مساوات کی رو سے

لر جب (ب۱ + ب۲ + ... + بر) = − ل۱ جب ب۱ − ل۲ جب (ب۱ + ب۲) − .....

− لر−۱ جب (ب۱ + ب۲ + ... + بر−۱) − لر+۱ جب (ب۱ + ... + بر+۱) ......

− لن−۱ جب (ب۱ + ... + بن)

پس ب۱ + ب۲ + ... + بر معلوم ہو سکتا ہے اور اس لیے بر۔

اس کے بعد ضلع $ل_ن$ حسب دفعہ سابق معلوم کیا جا سکتا ہے۔

(۲) اُس صورت میں جبکہ دو غیر معلوم زاوئے ایک دوسرے کے متصل نہ ہوں فرض کرو کہ ھ، ک وہ راس ہیں جن پر کہ زاویے غیر معلوم ہیں؛ ھ ک کو ملاؤ تو کثیر الاضلاع دو کثیر الاضلاعوں میں تقسیم ہو جاتا ہے جن میں سے ایک میں تمام ضلع سوائے ایک کے اور تمام زاویے سوائے اُن دو زاویوں کے معلوم ہیں جو غیر معلوم ضلع کے متصل ہیں۔ اس لئے ہم اس کثیر الاضلاع کو (۱) کی بموجب ھ ک اور ھ ک پر کے زاویوں کو متعین کر کے حل کر سکتے ہیں۔

دوسرے کثیر الاضلاع میں تمام ضلع سوائے ایک کے اور تمام زاویے (178)
سوائے دو متصلہ زاویوں کے معلوم ہیں؛ اس لئے اس کثیر الاضلاع کو (۲) کی بموجب حل کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح دیے ہوئے کثیر الاضلاع کے سب ضلع معلوم ہوتے ہیں اور ھ ک پر کے زاویے اُن دو حصوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں جن میں وہ ھ ک سے تقسیم ہوئے تھے اور جو علیحدہ علیحدہ معلوم ہو چکے ہیں۔

۱۴۳ — ن ضلعی کثیر الاضلاع کو حل کرنا جبکہ (ن-۲) ضلع اور (ن-۱) زاویے دیے جائیں۔

ہم رشتہ

$$ب_۱ + ب_۲ + \dots + ب_ن = ۲\pi$$

سے فوراً باقی زاویہ معلوم کر لیتے ہیں۔

غیر معلوم ضلع $ل_ر$ معلوم کرنے کے لئے مساوات

$$ل_۱ \,\text{جب}\, ب_۱ + ل_۲ \,\text{جب}\, (ب_۱ + ب_۲) + \dots + ل_{ن-۱} \times \text{جب}\, (ب_۱ + ب_۲ + \dots + ب_{ن-۱}) = ۰$$

کو استعمال کرو جو دوسرے غیر معلوم ضلع $ل_ن$ کے عمود پر ظل لینے سے حاصل ہوتی ہے۔ پھر ہم $ل_ن$ کو اسی طرح معلوم کر سکتے ہیں یا دوسری بنیادی مساوات استعمال کر سکتے ہیں۔

۱۴۴ — ن ضلعی کثیر الاضلاع کو حل کرنا جبکہ ن ضلع اور (ن-۳) زاویے دیے جائیں۔

فرض کرو کہ ف، ق، ر، وہ راسیں ہیں جن پر کے زاویے نہیں دئے گئے ہیں، ف ق، ق ر، ر ف کو ملاؤ تو کثیرالاضلاع چار حصوں میں تقسیم ہوتا ہے جن میں سے ایک مثلث ہے۔ ف ق ر کے سوا ہر حصہ میں تمام اضلاع سوائے ایک کے اور تمام زاویے سوائے اُن دو زاویوں کے دئے گئے ہیں جو اِن غیر معلوم ضلعوں کے متصل ہیں؛ اس لئے ہم ف ق، ق ر، ر ف، اور ف، ق، ر پر کے زاویوں کو معلوم کر سکتے ہیں۔ پھر مثلث ف ق ر کے زاوئے معلوم کئے جا سکتے ہیں کیونکہ اس کے ضلع معلوم ہو چکے ہیں۔ اب ہم ف، ق، ر پر کے زاویوں کو جمع کر کے دئے ہوئے کثیرالاضلاع کے مطلوبہ زاویے حاصل کر لیتے ہیں۔

بلندیاں اور فاصلے

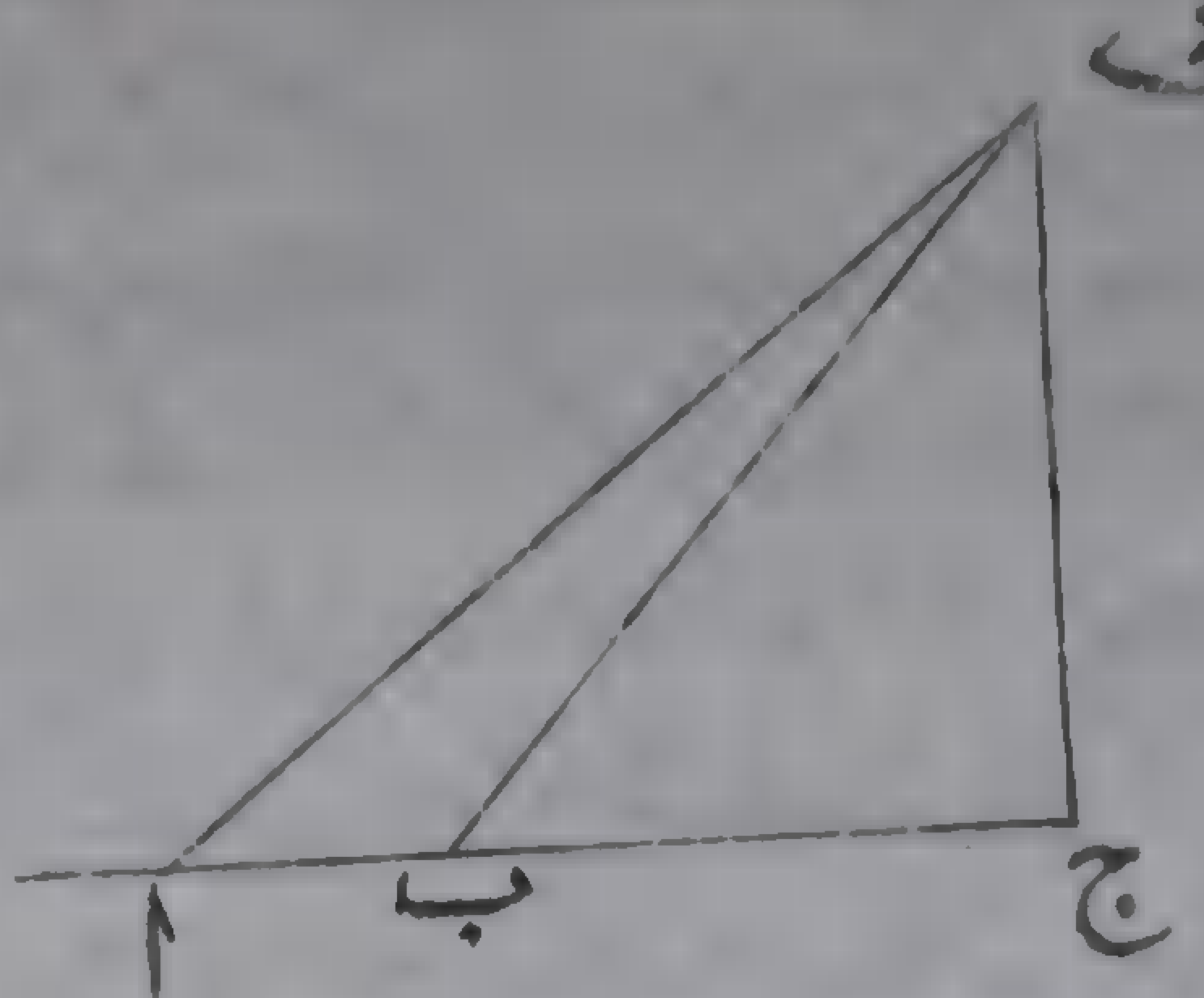
۱۴۵۔ اب ہم بلندیوں اور فاصلوں کی تعیّن پر مثلثوں کے حل کے اطلاقات کی چند مثالیں دینگے۔ اس مضمون پر زیادہ مکمل معلومات کے لیے مثلاً زاویوں کی پیمائش میں استعمال ہونے والے آلات کے بیان وغیرہ کے لیے پیمائش (Surveying) پر لکھی ہوئی کتابوں کا مطالعہ کرنا چاہیے۔

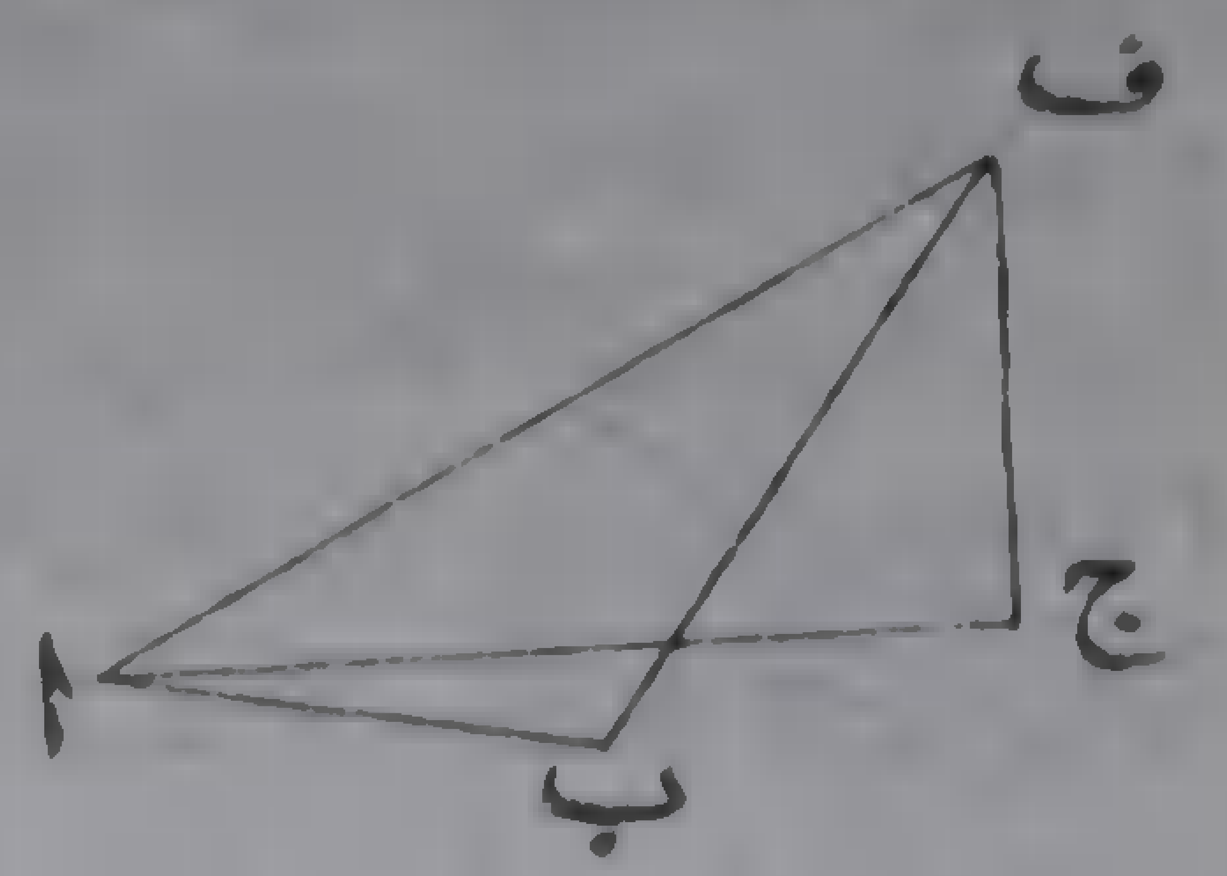
وہ خط مستقیم جو مقامِ مشاہدہ کو کسی شئے سے ملاتا ہے افق کے ساتھ ایک زاویہ بنائیگا، اِس زاویہ کو شئے کا زاویہ ارتفاع کہتے ہیں اگر شئے مذکور افق کے اوپر ہو اور زاویہ نشیب اگر وہ افق کے نیچے ہو۔

(179 ۱۴۶۔ اُفقی مستوی کے اوپر ایک ایسے نقطہ کی بلندی معلوم کرنا جہاں تک رسائی نہیں ہو سکتی۔

فرض کرو کہ یہ نقطہ ف ہے اور اس کا ظِل افقی مستوی پر ج ہے، فرض کرو کہ ف ج = ف اور اس افقی مستوی پر کوئی خط اب = بالشرط امکان ایسا منتخب کیا گیا ہے کہ اب ج ایک خطِ مستقیم ہے،

فرض کرو کہ ا اور ب پر ف کے زوایائے ارتفاع پیمائش کیے گئے ہیں؛





ان کو عہ، بہ سے تعبیر کرو۔ تب ل = اج - ب ج = ف (مم عہ - مم بہ)
اس لیے

$$\text{ف} = \frac{\text{ل جب عہ جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}}$$

جس سے ف معلوم ہوتا ہے۔ اگر قاعدہ کے خط کو ٹھیک ٹھیک ج کی سمت میں ناپنا ناممکن العمل ہو تو فرض کرو کہ اس کو کسی اور سمت میں ناپا گیا ہے، ا پر ف کا زاویۂ ارتفاع عہ پیمائش کرو اور نیز زاویوں ف ا ب (= جہ) اور ف ب ا (= ضہ) کی پیمائش کرو۔

$$\text{تب ف ا} = \text{ا ب} \times \frac{\text{جب ضہ}}{\text{جب (جہ + ضہ)}}\text{، اور ف = ا ف × جب عہ، اس لیے}$$

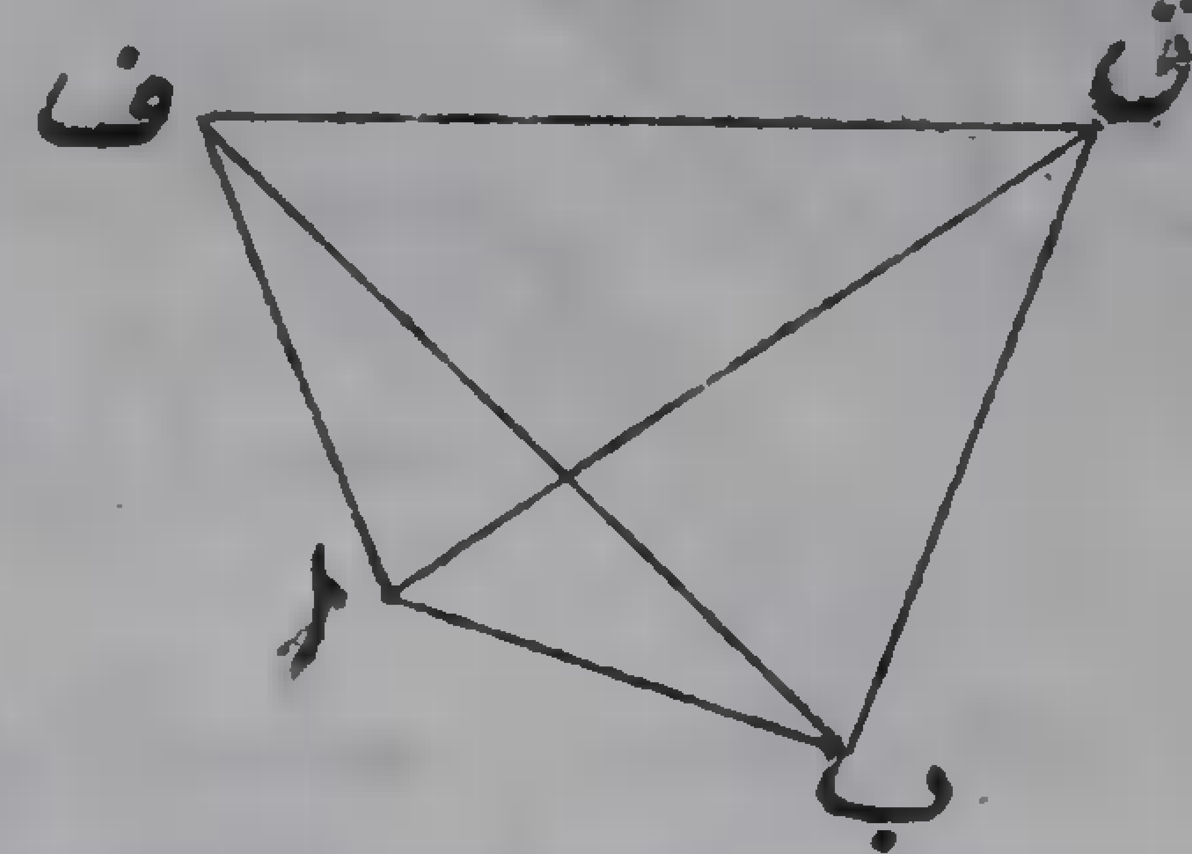
$$\text{ف} = \frac{\text{ل جب عہ جب ضہ}}{\text{جب (جہ + ضہ)}}$$

اس سے ف معلوم ہوتا ہے۔

۱۴۷ — ناقابل رسائی دو نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ یہ دو نقطے ف اور ق ہیں اور فرض کرو کہ کوئی قاعدہ کا خط اب (= ل) ناپا گیا ہے، نقطوں ا اور ب کو اس طرح منتخب کیا جاتا ہے کہ ف اور ق دونوں اِن میں سے ہر نقطہ سے نظر آسکتے ہیں۔ اب (180)
حسب ذیل تین زاویے پیمائش کرو۔

ف ا ق = عہ، ق ا ب = بہ، ف ا ب = جہ؛



یہ مشاہدہ طلب ہے کہ زاویے ف ا ق اور ق ا ب بالعموم ایک ہی مستوی میں نہیں ہوتے۔ ب پر زاویے ف ب ا (= ضہ) اور ق ب ا (= صہ) پیمائش کرو۔

مثلثوں ا ب ف اور ا ب ق سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ا ف = ل \frac{\text{جب ضہ}}{\text{جب (جہ + ضہ)}}$$

اور $ا ق = ل \frac{\text{جب صہ}}{\text{جب (بہ + صہ)}}$، پس ا ف اور ا ق اِن ضابطوں سے حاصل ہوتے ہیں:-

لوک ا ف = لوک ل + ل جب ضہ - ل جب (جہ + ضہ)،

لوک ا ق = لوک ل + ل جب صہ - ل جب (بہ + صہ)،

مثلث ف ا ق میں ا ف، ا ق اور زاویہ ف ا ق = عہ معلوم ہیں

اس لیے ہم ضابطوں

ل مس ½ (ا ف ق - ا ق ف) = ل مم ½ ع + لوک (ا ق - ا ف)
- لوک (ا ق + ا ف)،

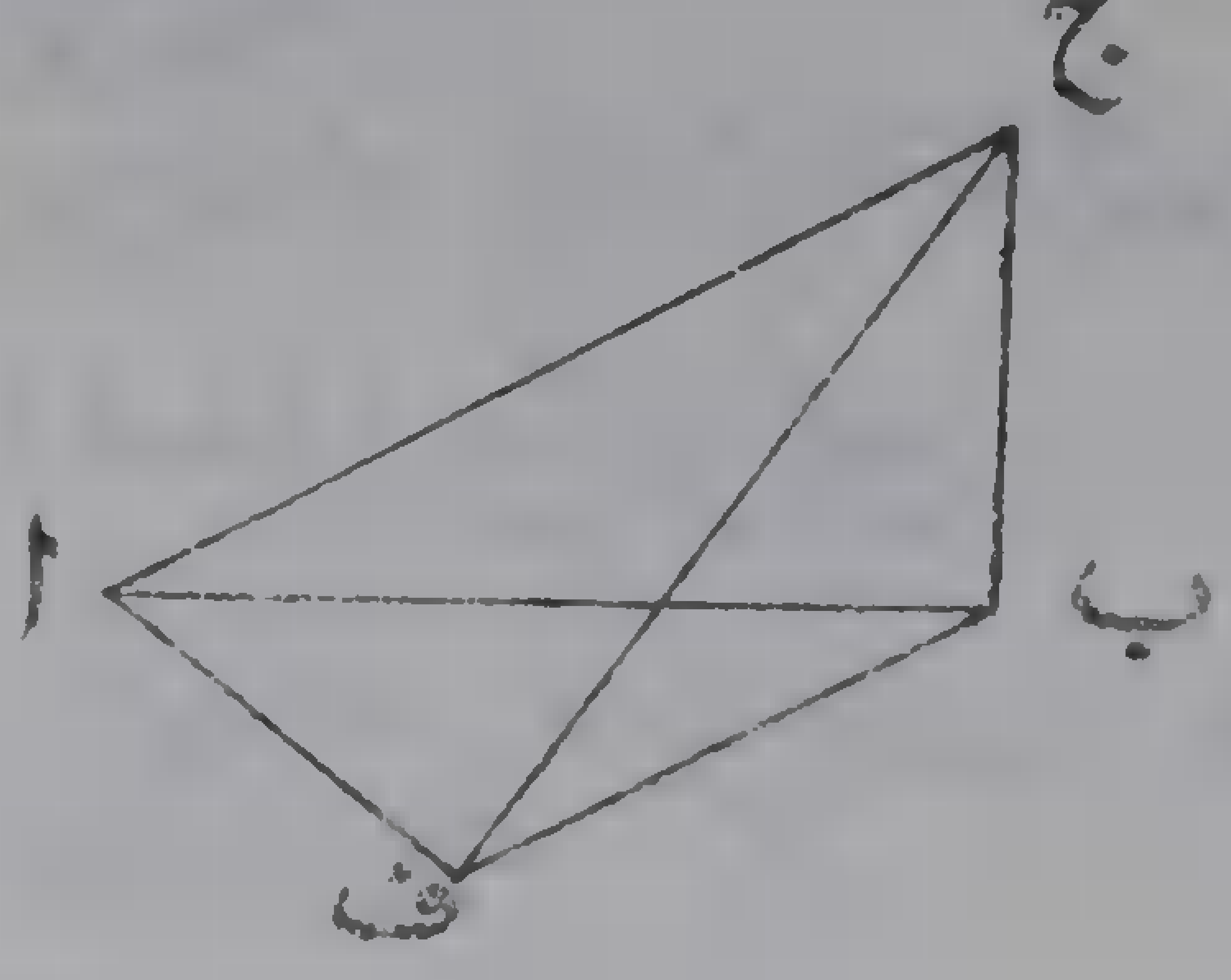
ا ف ق + ا ق ف = ۱۸۰° - ع،

سے زاویے ا ف ق اور ا ق ف معلوم کرتے ہیں۔ پھر ضابطہ

لوک ف ق = لوک ا ف + ل جب ع - ل جب ا ق ف

کے ذریعہ ف ق معلوم ہوتا ہے۔

۱۴۸ـــ پوتھناٹ (Pothenot.) کا مسئلہ ـــ ایک مثلث کے مستوی میں وہ نقطہ معلوم کرنا جس پر مثلث کے ضلعوں کے محاذی دیے ہوئے زاویے بنیں۔



فرض کرو کہ ع، ب وہ زاویے ہیں جو مثلث ا ب ج کے ضلعوں ا ج، ج ب کے محاذی نقطہ ف پر بنتے ہیں؛ فرض کرو کہ زاویوں ف ا ج، ف ب ج کو علی الترتیب لا، ما سے تعبیر کیا گیا ہے؛

ف کا محل معلوم ہوجاتا ہے اگر زاویے لا اور ما معلوم ہوجائیں کیونکہ مثلثوں ف ا ج، ف ب ج کو حل کرنے سے ف ا اور ف ب معلوم کیے جاسکتے ہیں۔

(181) ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} + \text{ما} = 2\pi - \text{عہ} - \text{بہ} - \text{ج}$$

نیز

$$\text{ف ج} = \frac{\text{ا جب ما}}{\text{جب بہ}} = \frac{\text{ب جب لا}}{\text{جب عہ}}$$

ایک امدادی زاویہ فہ مان لو ایسا کہ

$$\text{مس فہ} = \frac{\text{ا جب عہ}}{\text{ب جب بہ}}$$

اس لیے $\frac{\text{جب لا}}{\text{جب ما}} = \text{مس فہ}$، پس $\frac{\text{جب لا} - \text{جب ما}}{\text{جب لا} + \text{جب ما}} = \text{مس}\,(\text{فہ} - 45^\circ)$

یا $\text{مس}\,\frac{1}{2}\,(\text{لا} - \text{ما}) = \text{مس}\,\frac{1}{2}\,(\text{لا} + \text{ما})\ \text{مس}\,(\text{فہ} - 45^\circ)$

$$= \text{مس}\,(45^\circ - \text{فہ})\ \text{مس}\,\frac{1}{2}\,(\text{عہ} + \text{بہ} + \text{ج})$$

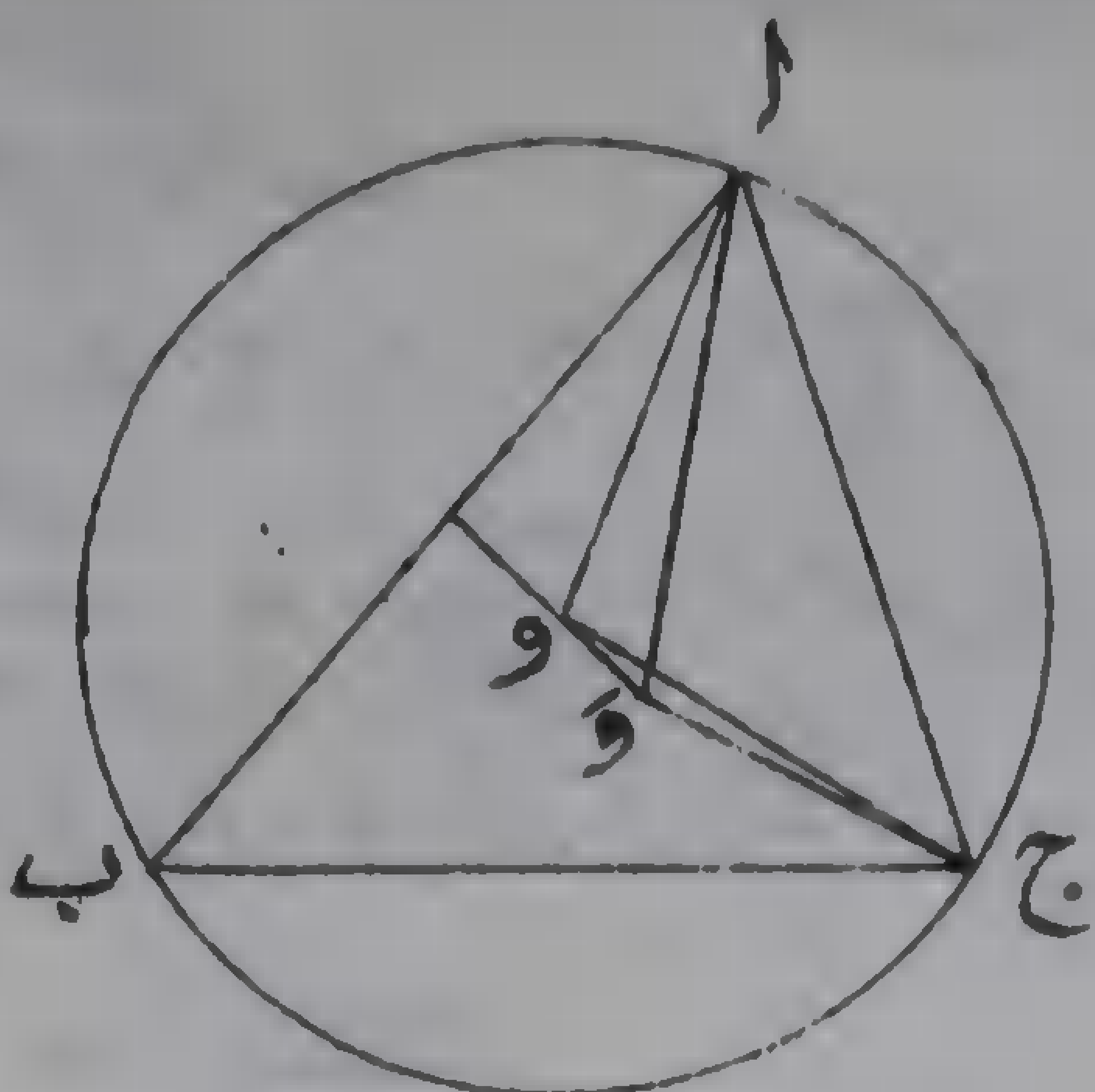
اس طرح لا − ما معلوم کیا جاسکتا ہے اور چونکہ لا + ما معلوم ہے اس لیے لا اور ما معلوم ہوسکتے ہیں۔

مثالیں

(۱) افقی مستوی میں ایک مثلث ا ب ج کے راسوں ا، ب، ج میں سے ہر راس پر ایک پہاڑ کی چوٹی کا ارتفاع عہ دکھائی دیتا ہے؛ ثابت کرو کہ پہاڑ کی بلندی ½ ا مس عہ قم ا ہے نیز اگر ج پر کے ارتفاع میں چھوٹی خطا نً واقع ہوئی ہو تو بتاؤ کہ اصل بلندی بہت تقریبی طور پر ہے

$$\frac{1}{2}\,\frac{\text{ا مس عہ}}{\text{۲ جب ا}}\left(1 + \frac{\text{حم ج}}{\text{جب ا جب ب}} \times \frac{\text{جب نً}}{\text{جب ۲ عہ}}\right)$$

فرض کرو کہ پہاڑ کی چوٹی کا ظل مستوی ا ب ج پر و ہے، تب اگر پہاڑ



کی بلندی ف ہو تو ف = و ا مس عہ = و ب مس عہ = و ج مس عہ؛
اِس لیے و، ا ب ج کے حائط دائرہ کا مرکز ہے، پس و ا = ½ ا قم ا،
یا ف = ½ ا مس عہ قم ا۔ اگر ج پر کے ارتفاع کی پیمایش عہ + نً ہو تو فرض
کرو کہ وَ، پہاڑ کی چوٹی کا ظل ہے، تب چونکہ ا اور ب پر کے ارتفاع مساوی
ہیں اس لیے و وَ، ا ب پر عمود ہے؛ اب فرض کرو کہ پہاڑ کی بلندی
ف + لا ہے۔ ہندسی طور پر حاصل ہوتا ہے۔

وَ ا = و ا + و وَ جم ج،

وَ ج = و ج - و وَ جم (ا - ب)

اب اگر و وَ اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کے مربع نظر انداز ہو سکیں، تو (182)

ف + لا = وَ ا مس عہ = وَ ج مس (عہ + نً)

= (و ا + و وَ جم ج) مس عہ = {و ج - و وَ جم (ا - ب)} مس (عہ + نً)

پس لا = و وَ × جم ج × مس عہ = - و وَ جم (ا - ب) مس عہ + و ج قط² عہ × جب نً

کیونکہ مس (عہ + نً) = مس عہ + قط² عہ جب نً، تقریباً، و وَ کو ساقط کرنے سے

لا جم (ا-ب) مس عہ = جم ج مس عہ (و ج قط² عہ جب نؐ - لا)،

اس لیے ۲ لا جب ا جب ب = و ج قط² عہ جم ج جب نؐ

اس لیے اصل بلندی ہے ف + ا = ½ (مس عہ / جب ا) (۱ + جم ج / جب ا جب ب × جب نؐ / جب ۲ عہ)

(۲) ایک مثلث کے ضلعوں کی پیمایش کی گئی تو معلوم ہوا کہ ا = ۵، ب = ۴، ج = ۶ لیکن یہ معلوم ہے کہ ج کی پیمایش میں ایک چھوٹی خطا ہے؛ معلوم کرو کہ کون سا زاویہ زیادہ سے زیادہ صحت کے ساتھ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ج کی صحیح قیمت لا + ۶ ہے؛ فرض کرو کہ مثلث کے زاویے ا + مف ا، ب + مف ب، ج + مف ج ہیں جن میں اجزاء مف ا، مف ب، مف ج منحصر ہیں لا پر؛ ہم لا کو اس قدر چھوٹا مان لینگے کہ اس کا مربع نظر انداز ہو سکتا ہے۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے

جم (ا + مف ا) = (۱۶ + (لا + ۶)² - ۲۵) / (۲ × ۴ (لا + ۶)) = (۲۷ + ۱۲ لا) / (۴۸ (۱ + ⅙ لا)) = ۲۷/۴۸ (۱ + ۱۲/۲۷ لا - ⅙ لا)

= ۲۷/۴۸ (۱ + ۵/۱۸ لا)، تقریباً

پس جب ا × مف ا = - ۵/۳۲ لا؛

نیز جم (ب + مف ب) = (۲۵ + (لا + ۶)² - ۱۶) / (۲ × ۵ (لا + ۶)) = ۳/۴ (۱ + لا/۱۰)

پس جب ب × مف ب = - ۳/۴۰ لا؛

اور نیز جم (ج + مف ج) = (۲۵ + ۱۶ - (لا + ۶)²) / (۲ × ۵ × ۴) = ⅛ (۱ - ۱۲/۵ لا)

پس جب ج × مف ج = ۳/۱۰ لا؛

$$\text{نیز}\quad \frac{\text{جب ا}}{۵} = \frac{\text{جب ب}}{۴} = \frac{\text{جب ج}}{۶}$$

اس طرح ۲۴ مف ا = ۴۰ مف ب = ۱۵ مف ج

اس لیے مف ب، مف ا اور مف ج سے عدداً چھوٹا ہے اور اس لیے زاویہ ب زیادہ سے زیادہ صحت کے ساتھ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

گیارہویں باب پر مثالیں

۱ــــ ایک مثلث کے ضلع ۸، ۷، ۵ ہیں؛ چھوٹے سے چھوٹا زاویہ معلوم کرو۔

یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۱۱۲ = ۲٫۰۴۹۲۱۸۰

لوک ۹ْ ۴ً ۶َ = ۹٫۹۷۵۴۰۸۳، فرق ۶٠ً کے لیے = ۰٫۰۰۰۴۳۷

۲ــــ اگر ایک مثلث میں ا = ۶۵، ب = ۱۶، ج = ۶۰ْ تو دوسرے زاویے معلوم کرو۔

یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۳ = ۰٫۴۷۷۱۲۱۳، ل مس ۴۶ْ ۴۰َ = ۱۰٫۰۲۰۲۲۰۳

لوک ۷ = ۰٫۸۴۵۰۹۸۰، ل مس ۴۶ْ ۴۱َ = ۱۰٫۰۲۰۴۷۳۱

۳ــــ ایک مثلث کے ضلع ۳، ۵، ۷ فٹ ہیں۔ زاویے معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ (183)

لوک ۱۳٫۵ = ۱٫۱۳۰۳۳۳۸، لوک ۱۴ = ۱٫۱۴۶۱۲۸۰،

ل جم ۱۰ْ ۵۳َ = ۹٫۹۹۲۱۱۷۵، ل جم ۱۰ْ ۵۴َ = ۹٫۹۹۲۰۹۳۲

۴ ــ اگر ب = ۵۵ْ، ج = ۱۰ْ، ا = ۲۰۰ فٹ تو ب معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳۰۰، لوک ۱۷۲٫۶۴ = ۲٫۲۳۷۱۴۱۴

ل جب ۵۵ْ = ۹٫۹۱۳۳۶۴۵، لوک ۱۷۲٫۶۵ = ۲٫۲۳۷۱۶۶۶

۵ــــ اگر ایک مثلث میں ب = ۲٫۲۵ فٹ، ج = ۱٫۷۵ فٹ، ا = ۴۵ْ تو ب اور ج معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳۰ ، ل مم ۲۷° = ۱۰٫۲۹۲۸۳۴ ،

ل مس ۱۳° ۴۷′ = ۹٫۳۸۹۷۲۴ ، ل مس ۱۳° ۴۸′ = ۹٫۳۹۰۲۷۰ ،

۶۔ اگر ایک مثلث کے دو ضلعوں کے طولوں میں نسبت ۹ : ۷ ہو اور ان کا درمیانی زاویہ ۴۷° ۲۵′ ہو تو دوسرے زاویے معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳۰۰ ، ل مس ۶۶° ۱۷′ ۳۰″ = ۱۰٫۳۵۷۳۹۴۲

ل مس ۱۵° ۵۳′ = ۹٫۴۵۴۱۴۷۹ ، فرق ۱′ کے لیے = ۴۷۹۶

۷۔ ایک مثلث کا ایک زاویہ ۹۰° ہے، رقبہ ۱۰√۳ ، اور گھیرا ۲۰، باقی زاویے اور ضلعے معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳۰۰ ، ل جب ۴۹° ۶′ = ۹٫۸۷۸۴۳۷۶

لوک ۷ = ٫۸۴۵۰۹۸۰ ، ل جب ۴۹° ۷′ = ۹٫۸۷۸۵۴۷۰

۸۔ ایک مثلث ا ب ج میں یہ دیا گیا ہے کہ ا = ۱۰ فٹ، ب = ۹ فٹ، ج = مس⁻¹ (۳/۴) ج معلوم کرو۔ اگر ا اور ب کے ناپنے میں ایک انچ سے بڑی اور ج کی پیمائش میں ۱′ سے بڑی خطائیں نہ ہوں تو ثابت کرو کہ ج کی محسوب کردہ قیمت میں جو خطا ہے وہ ۲٫۷ انچ سے کم ہوگی۔

۹۔ اگر مبہم صورت میں مثلث کے اجزاء ا، ب، ب دیے گئے ہوں جہاں ا > ب، اور تیسرے ضلع کی قیمتیں ج، جَ ہوں تو ثابت کرو کہ ج² − ۲ ج جَ جم ۲ب + جَ² = ۴ ب² جم² ب

۱۰۔ مبہم صورت میں جس میں ا، ب، ا دیے گئے ہوں اگر ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے متناظر زاویہ کا دگنا ہو تو ثابت کرو کہ

ا√۳ = ۲ب جب ا، یا ۴ ب³ جب² ا = ا² (ا + ۳ب)

۱۱۔ ایک مثلث کا قاعدہ اس کے ارتفاع کے مساوی ہے اور دوسرے دو ضلع معلومہ طول کے ہیں۔ مثلث کے دیگر اجزاء معلوم کرو اُن ضابطوں سے جو لوکارثمی عمل حساب کے لیے موزوں ہوں۔ ثابت کرو کہ دیے ہوئے ضلعوں میں جو نسبت ہے اُس کو ½ (√۵ − ۱) اور ½ (√۵ + ۱) کے درمیان واقع ہونا چاہیے۔

۱۲۔ زمین کے ایک مثلثی ٹکڑے میں اس کا طویل ترین ضلع ۹۰ گز ہے، دوسرے دو ضلعوں کا مجموعہ ۱۰۰ گز ہے اور اس کا ایک زاویہ ۶۰° ہے۔ دوسرے زاویے

معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

ل مس ۳۲° = ۹٫۷۹۵۸۰۷۲۶۹

ل مس ۳۱° ۱۵′ = ۹٫۷۸۱۹۳۴۴، ل مس ۳۱° ۱۶′ = ۹٫۷۸۲۴۹۹۲

۱۳۔۔ ایک مثلث کا ایک زاویہ ۶۰° ہے، مقابل کا ضلع ۴ اور ارتفاع √۵-۱ ہے۔ مثلث کو حل کرو۔

۱۴۔۔ اگر ایک مثلث کا کوئی ضلع ¼ (۳-√۵) × گھیرا سے کم ہو تو بتاؤ کہ زاویوں سے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے ہوئے عمودوں سے ایک مثلث کا بنانا ناممکن ہے؛ لیکن اگر ہر ضلع ½ گھیرے سے بڑا ہے تو یقیناً ایسا مثلث بنانا ممکن ہے۔ (184)

۱۵۔۔ اگر اجزا ا ج = ۵°، ب = ۲، ج = √۶ سے ایک مثلث کو حل کیا جائے تو بتاؤ کہ ج کی قیمت میں ۱′ کی خطا سے ب کی محسوب کردہ قیمت میں تقریباً ۳٫۴۴″ کی خطا پیدا ہوگی۔

۱۶۔۔ ایک مثلث کے ضلع سلسلۂ حسابیہ میں ہیں۔ اگر اس کا اوسط ضلع اور اس کے مقابل کا زاویہ دیے گئے ہوں تو مثلث کو حل کرنے کے لیے ضابطوں کی تلاش کرو اور دیے ہوئے زاویہ کی بڑی سے بڑی ممکن قیمت معلوم کرو۔ اگر اوسط ضلع ۲۴۵ فٹ اور مقابل کا زاویہ ۵۹° ۵۹′ ۵″ ہو تو مثلث کو حل کرو۔

۱۷۔ ایک مثلث کے وسطی خط کا طول اور وہ زاویے دیے گئے ہیں جن میں یہ خط راسی زاویہ کو تقسیم کرتا ہے۔ اس مثلث کو حل کرو۔

۱۸۔۔ ایک مثلث کا ایک ضلع، اس کے مقابل کا زاویہ، اور اس زاویہ سے ضلع پر کا عمود دیے گئے ہیں۔ مثلث کو حل کرو۔

۱۹۔۔ ایک مثلث کو دیے ہوئے اجزا ا، ب، ا سے حل کیا گیا ہے۔ اگر ا، ب کی قیمتیں چھوٹی خطاؤں لا، ما سے علی الترتیب متاثر ہوں تو ان کی وجہ سے ا سے مقابل کے ضلع پر کھینچے ہوئے عمود کے محسوب کرنے میں جو خطا واقع ہوتی ہے اس کو معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ خطا صفر ہے اگر

لا جب² ب جم ج = ما (جب² ب۔ جب² ج)

۲۰۔۔ ایک کشتی جنوب سے ۵۰° مشرق کی سمت میں چل رہی ہے اس سے

ایک روشنی کا مینار دیکھا گیا ہے جو شمال سے ۴۵° مشرق والی سمت میں نظر آتا ہے۔ کشتی ایک میل آگے جانے کے بعد پھر اس مینار کا مشاہدہ کیا گیا تو وہ ٹھیک شمال کی سمت میں نظر آیا۔ اس آخری مشاہدہ کے وقت مینار کا فاصلہ' گزوں تک صحیح' معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

ل جب ۲۰° = ۹،۵۳۴۰۵۲ ' لوک ۲ = ۰.۳۰۱۰۳۰۰

لوک ۲۰۶ = ۲،۳۱۳۸۶۷ ' لوک ۲۰۷ = ۲،۳۱۵۹۰۰

۲۱۔ ایک چٹان پر ایک مینار ہے جس کو دریا میں کی ایک کشتی سے دیکھا گیا تو معلوم ہوا کہ مینار کی چوٹی کا ارتفاع ۳۰° ہے؛ پھر ساحل کی طرف پہلے مشاہدے کے مستوی میں ۵۰۰ گز کا فاصلہ طے کرنے کے بعد معلوم ہوا کہ مینار کی چوٹی اور اس کے قاعدے کے ارتفاع علی الترتیب ۶۰° اور ۴۵° ہیں۔ چٹان اور مینار کی بلندیاں معلوم کرو۔

۲۲۔ ایک انتصابی ستون کا پائین ا ہے۔ ب اور ج' ا کے ٹھیک مشرق میں ہیں اور د' ج کے جنوب میں ہے۔ ب پر ستون کا جو ارتفاع ہے وہ ج پر کے ارتفاع کا دُگنا ہے اور وہ زاویہ مس ا ۱/۵ ہے جو ا ب کے محاذی د پر بنتا ہے' نیز ب ج = ۲۰ فٹ' ج د = ۳۰ فٹ۔ ستون کی بلندی معلوم کرو۔

۲۳۔ ایک خاص مقام سے ایک پہاڑ شمال مشرقی سمت میں نظر آتا ہے۔ اس مقام سے اس پہاڑ کی چوٹی کا ارتفاع عہ مشاہدہ کیا گیا ہے۔ مذکورہ مقام سے مشرق جنوب مشرق کی سمت میں ایک ٹیلہ پر جس کا ارتفاع ف معلوم ہے چڑھا جاتا ہے اور ٹیلہ کی چوٹی سے پہاڑ کی چوٹی سمت شمال میں زاویہ ارتفاع بہ پر دکھائی دیتی ہے۔ ثابت کرو کہ مقام قبل الذکر کے اوپر پہاڑ کی چوٹی کی بلندی ف جب عہ جم بہ قم (عہ - بہ) ہے۔

۲۴۔ دو مستقیم متقاطع پٹڑیوں میں سے ایک پر ایک ٹرین جا رہی ہے۔ جب اس کے پہلے ڈبہ کا اگلا رخ پٹڑیوں کے مقام اتصال پر پہنچتا ہے تو ٹرین کے محاذی دوسری پٹڑی پر کے کسی خاص مقام پر زاویہ عہ بنتا ہے اور جب اس کے آخری ڈبہ کی پشت پہنچتی ہے تو زاویہ عہَ بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ دو پٹڑیاں ایک

دوسرے سے زاویہ طہ پر مائل ہیں جہاں طہ، مساوات ۲ مم طہ = مم عہ بہ مم عہَ سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۵ — ایک اسطوانی مینار ایک افقی میدان پر قائم ہے؛ ایک آنکھ جو میدان میں واقع ہے مینار کے اوپر کے سرے کی کور کی قوس کو دیکھتی ہے جو نظر آرہی ہے۔ اگر اس قوس کے کسی سرے کے زاویۂ ارتفاع میدان کے اوپر عہ، عہَ، عہً ہوں جبکہ آنکھ علی الترتیب ج، جَ، جً فاصلوں پر واقع ہو تو ثابت کرو کہ

(جَ۲ - جً۲) مم۲ عہ + (جً۲ - ج۲) مم۲ عہَ + (ج۲ - جَ۲) مم۲ عہً = ۰

۲۶ — ایک غبارہ شمال مشرقی سمت میں ارتفاع عہ پر دیکھا گیا؛ دس منٹ بعد ٹھیک شمال میں ارتفاع بہ پر وہ نظر آیا۔ بعد ازاں معلوم ہوا کہ جس شرح سے وہ نیچے اُتر رہا تھا وہ چھ میل فی گھنٹہ تھی؛ اس کی افقی حرکت کو یکساں فرض کرکے ثابت کرو کہ اس کی افقی حرکت کی شرح

۶ / (√۲ مس عہ - مس بہ)

میل فی گھنٹہ تھی؛ اس دوران میں ہوا کی سمت مشرقاً تھی۔

۲۷ — مجھے دو میناروں کی چوٹیاں ایک خطِ مستقیم میں زاویۂ ارتفاع عہ پر نظر آتی ہیں، اور ساکن پانی میں ان کے عکسوں کے زاویۂ نشیب بہ اور جہ دکھائی دیتے ہیں۔ اگر میری آنکھ کی بلندی سطح آب کے اوپر ج ہو تو ثابت کرو کہ میناروں کے درمیان افقی فاصلہ ہے

۲ ج جم۲ عہ جیب (بہ - جہ) / جیب (بہ - عہ) جیب (جہ - عہ)

۲۸ — ایک برج کے جنوب میں، مقام ا سے برج کا زاوئی ارتفاع ۳۰° ہے اور مقام ب پر جو ا سے ا فاصلہ پر اس کے مغرب میں واقع ہے برج کا ارتفاع ۱۸° ہے۔ بتاؤ کہ برج کی بلندی ل / √(۲ ط ۲ + ۲) ہے۔

۲۹- ایک بُرج جو ۱۵ فٹ بلند ہے اور زمین سے ۲۵ فٹ بلندی پر اس پر ایک نشان ہے؛ بتاؤ کس فاصلہ پر بُرج کے یہ دو حصے ایک آنکھ پر مساوی زاویے بنائیںگے جبکہ آنکھ سطح زمین سے ۵ فٹ بلند واقع ہو۔

۳۰- ایک شخص مسطح میدان سے جس پر ایک بُرج ہے اور بُرج پر ایک مینار ہے مشاہدہ کرتا ہے کہ جب وہ بُرج کے پائین سے ا فیٹ فاصلے پر ہوتا ہے تو اس کی چوٹی اور ایک پہاڑ کی چوٹی ایک خطِ مستقیم میں نظر آتی ہیں۔ بُرج کے پائین سے ب فٹ اور پرے ہٹنے سے وہ دیکھتا ہے کہ مینار کے محاذی اس کی آنکھ پر حسب سابق وہی زاویہ بنتا ہے اور اس کی چوٹی اور پہاڑ کی چوٹی ایک خطِ مستقیم میں ہیں؛ ثابت کرو کہ اگر مشاہد کی آنکھ میں سے گزرنے والے افقی مستوی کے اوپر بُرج کی بلندی ج فٹ ہو تو پہاڑ کی بلندی اُسی مستوی کے اوپر $\frac{ا ب ج}{ج^2 - ا^2}$ فٹ ہوگی

۳۱- ایک شخص ۵ فٹ قد والا ایک مخروط مضلع کے قاعدہ کے نزدیک کھڑا ہے جس کا قاعدہ مربع ہے، وہ دیکھتا ہے کہ آفتاب مخروط مضلع کے ایک کنارہ پر اس کے وسط میں غائب ہوتا ہے۔ اگر نزدیک ترین کناروں سے شخص مذکور کے فاصلے ا اور ب ہوں اور سورج کا ارتفاع ط ہو تو ثابت کرو کہ مخروط مضلع کی بلندی ہے

$$۱۰ + \text{مس}\, ط \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(۵ ا^2 - ۲ ا ب + ب^2\right)} \text{ فٹ}$$

(186) ۳۲- ایک پہاڑی کی چوٹی سے نیچے کے میدان پر کے ایک نقطہ کا زاویہ نشیب ۴۵° ہے اور پہاڑی سے تین چوتھائی راستہ نیچے اترنے کے بعد اسی نقطہ کا زاویہ نشیب ۱۵° ہے۔ آ تک صحیح پہاڑی کا میلان معلوم کرو۔

۳۳- ا ب ج د، ایک کمرہ کا مستطیلی فرش ہے جس کا طول ا ب، ا فٹ ہے۔ کمرہ کی بلندی معلوم کرو اگر ج پر کمرے کی بلندی کے محاذی کونہ ا پر زاویہ ء بنے اور کونہ ب پر زاویہ ہ بنے۔ اگر ا = ۴۸ فٹ، ء = ۱۸°، ہ = ۳۰° تو ثابت کرو کہ بلندی تقریباً ۱۸ فٹ ۱۰ انچ ہے۔

۳۴- ایک بُرج ایک افقی مستوی پر ایک پہاڑی سے جس کا میلان ء ہے

ا فاصلہ پر واقع ہے۔ پہاڑی پر کے ایک شخص کو بُرج کے اوپر سے ایک تالاب مین دکھائی دے سکتا ہے، اس تالاب کا فاصلہ بُرج سے ب ہے۔ اگر مشاہد کا فاصلہ پہاڑی کے پائین سے ج ہو تو ثابت کرو کہ بُرج کی بلندی

$$\frac{\text{ب ج جب عہ}}{\text{ا + ب + ج جم عہ}}$$ ہے۔

۳۵ —— ایک شخص دو بُرجوں کے درمیان کھڑا دیکھتا ہے کہ ان میں سے ہر ایک بُرج اُس کی آنکھ پر زاویہ عہ بناتا ہے، پھر وہ ایک سیدھے راستہ پر جو بُرجوں کو ملانے والے خط سے زاویہ جہ پر مائل ہے ا فٹ چلتا ہے اور دیکھتا ہے کہ اس کی آنکھ پر ان میں سے ہر برج کے محاذی زاویہ بہ بنتا ہے؛ برجوں کی بلندیاں معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل رشتے ثابت کرو:—

ف فَ (مم^2 بہ - مم^2 عہ) = ا^2

(فَ - ف) (مم^2 بہ - مم^2 عہ) = ۲ ا مم عہ جم جہ

جن میں ف، فَ سے برجوں کی بلندیاں تعبیر ہوتی ہیں۔

۳۶ —— ایک پہاڑی کی چوٹی سے ایک پُل کے دو ستونوں کے زاویہ نشیب عہ، بہ مشاہدہ کیے گئے ہیں اور ستونوں کا درمیانی فاصلہ ا مشاہدہ کے نقطہ پر زاویۂ طہ بناتا ہے؛ ثابت کرو کہ پہاڑی کی بلندی ہے:

½ ا مم فہ قط ½ طہ √(جب عہ جب بہ)

جہاں جم فہ = ۲ جم ½ طہ √(جب عہ جب بہ) (جب عہ + جب بہ)$^{-1}$

۳۷ —— ایک پہاڑی پر سے ایک شخص دیکھتا ہے کہ تین بُرج جو ایک افقی مستوی پر واقع ہیں اس کی آنکھ پر مساوی زاویے بناتے ہیں اور ان کے قاعدوں کے زاویے نشیب عہ، عہَ، عہً ہیں؛ اگر ج، جَ، جً برجوں کی بلندیاں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب (عہَ - عہً)}}{\text{ج جب عہ}} + \frac{\text{جب (عہً - عہ)}}{\text{جَ جب عہَ}} + \frac{\text{جب (عہ - عہَ)}}{\text{جً جب عہً}} = ۰$$

۳۸ــــ ایک قلعہ سے ایک توپ داغی گئی تو معلوم ہوا کہ دو مقامات ب اور ج پر اس کی روشنی کے نظر آنے اور آواز کے سنائی دینے میں جو وقفے ہوئے وہ علی الترتیب ت، تَ ہیں؛ خطِ مستقیم ب ج میں ا سے معلومہ فاصلہ ڈ پر د ایک نقطہ ہے؛ اگر ب د = ب، اور ج د = ج تو ثابت کرو کہ آواز کی رفتار ہے

$$\left\{\frac{(ب - ج)\,(ڈ^2 - ب\,ج)}{ب\,تَ^2 - ج\,ت^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

اُس صورت کا امتحان کرو جب، $ڈ^2$ = ب ج

۳۹ــــ ایک پہاڑی کی چوٹی پر ایک چوکونی مینار ہے اور پہاڑی کا ڈھال مستقل میلان رکھتا ہے۔ ڈھال پر کے ایک نقطہ سے مینار کے سرے کا زاویہ ارتفاع عہ مشاہدہ کیا گیا اور پھر پہاڑی کی چوٹی کی طرف ڈ فٹ آگے بڑھنے سے زاویہ ارتفاع بہ معلوم ہوا۔ اگر مینار کی بلندی ف ہو تو ثابت کرو کہ پہاڑی کا میلان افق کے ساتھ ہے

$$جم^{-1}\left\{\frac{ڈ}{ف} \times \frac{جب\ عہ\ جب\ بہ}{جب\ (بہ - عہ)}\right\}$$

۴۰ــــ ایک کروی گنبد کے راس پر ایک صلیب نصب ہے؛ کسی خاص نقطہ پر صلیب کا زاویہ ارتفاع عہ اور گنبد کا زاویہ ارتفاع بہ مشاہدہ کیا گیا ہے؛ گنبد کی طرف فاصلہ ڈ طے کرنے کے بعد معلوم ہوا کہ صلیب گنبد کے عین اوپر ہے اور اس کا زاویہ ارتفاع جہ ہے۔ ثابت کرو کہ سطح زمین کے اوپر گنبد کے مرکز کی بلندی ہے

$$\frac{ڈ\ جب\ جہ}{جب\ (جہ - عہ)} \times \frac{جب\ عہ\ جم\ جہ - جم\ عہ\ جب\ بہ}{جم\ جہ - جم\ بہ}$$

۴۱ــــ کسی دن دوپہر کے وقت آفتاب کا ارتفاع عہ ہے۔ ایک شخص اس وقت

ایک ابر کے ٹکڑے میں ایک دائری شگاف دیکھتا ہے جو اُس کے جنوب میں ا فاصلہ پر کے ایک مقام کے اوپر انتصاباً واقع ہے۔ وہ مشاہدہ کرتا ہے کہ شگاف کے محاذی اُس کی آنکھ پر ۲ طہ کا زاویہ بنتا ہے اور زمین پر کا روشن داغ اُس کی آنکھ پر ۲ فہ کا زاویہ بناتا ہے۔ اگر ابر کے ٹکڑے کی بلندی زمین کے اوپر لا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا}^{2}(\text{م}^{2}\,\text{عہ مس}^{2}\,\text{فہ} - \text{مس}^{2}\,\text{طہ}) - 2\,\text{ا لا م عہ مس}^{2}\,\text{فہ} + \text{ا}^{2}(\text{مس}^{2}\,\text{فہ} - \text{مس}^{2}\,\text{طہ}) = 0$$

۴۲ــــ ایک پہاڑی کے ڈھال پر کے ایک نقطہ سے دو سیدھے راستے بنائے گئے ہیں، ایک راستہ ایک انتصابی مستوی میں جنوباً واقع ہے، دوسرا راستہ دوسرے انتصابی مستوی میں جو قبل الذکر کے علی القوائم ہے مشرقاً واقع ہے۔ یہ راستے ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ عہ بناتے ہیں اور ان کے طول اُس افقی سڑک تک جو پہاڑی کے پائین میں ہے علی الترتیب ا اور ب ہیں۔ ثابت کرو کہ پہاڑی افقی سمت کے ساتھ زاویہ

$$\text{جب}^{-1}\left(\frac{\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2} - 2\,\text{ا ب جم عہ}}{\text{ا ب جب عہ مس عہ}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

پر مائل ہے۔

۴۳ــــ ایک سیدھی ندی کا عرض اس طرح محسوب کیا گیا ہے کہ اس کی ایک جانب ا طول کا ایک قاعدہ ناپا گیا ہے اور اس کے سروں کو مقابل کے کنارہ پر کے ایک نشان سے ملانے والے خطوطِ مستقیم جو زاویے قاعدے کے ساتھ بناتے ہیں ان کا مشاہدہ کیا گیا ہے۔ اگر اُس آلہ سے جس سے زاویے ناپے گئے ہیں زاویوں کی قیمتیں اصلی قیمتوں سے (۱ + ن) گنی حاصل ہوئی ہوں جہاں ن بہت چھوٹا ہے تو ثابت کرو کہ دریا کے محسوب کردہ عرض میں جو خطا ہے وہ

$$\text{ن ا} \times \frac{\text{بہ جب}^{2}\,\text{عہ} - \text{عہ جب}^{2}\,\text{بہ}}{\text{جب}^{2}\,(\text{عہ} - \text{بہ})}$$

کے بہت قریب ہے؛ عہ، بہ مذکورہ بالا زاویوں کے دائری ناپ ہیں۔

۴۴ــــ ایک مُشاہد ایک جہاز کے عرشہ سے جو سطح سمندر سے ۲۰ فٹ اوپر ہے دُور کے روشنی کے مینار کی چوٹی کو عین دیکھ سکتا ہے، وہ پھر جھنڈے کے ڈنڈے پر اوپر تک چڑھتا ہے جہاں وہ عرشہ سے ۸۰ فٹ بلند ہو جاتا ہے تو اُسے روشنی کے

مینار کا دروازہ نظر آتا ہے جس کی بلندی سمندر کے اوپر مینار کی بلندی کا چوتھائی ہے۔ مینار سے اُس کا فاصلہ اور مینار کی بلندی معلوم کرو اگر یہ مان لیا جائے کہ زمین ایک کرہ ہے جس کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہے۔

۴۵ــــ ایک سیدھی نہر کے کنارے پر تین کھمبے ایک ایک میل کے فاصلے پر گاڑے گئے ہیں، ان میں سے ہر ایک کی بلندی سطح آب کے اوپر ایک ہی ہے۔ اگر پہلے اور تیسرے کھمبوں کے سروں کو ملانے والا نظری خط درمیانی کھمبے کو اس کے سرے سے آٹھ انچ نیچے قطع کرے تو زمین کا نصف قطر ایک میل تک صحیح معلوم کرو۔

۴۶ــــ تین نقطوں ا، ب، ج پر جو ایک افقی مستوی میں ہیں سوراخ ڈال کر مورم کی تہ کا سراغ لگایا گیا تو معلوم ہوا کہ وہ علی الترتیب ا، ب، ج گہرائیوں پر ہے؛ نیز اب = ف، ب ج = ک، ا ب ج = عہ، اگر مورم کی تہ کی اوپر کی سطح، مستوی ہو تو ثابت کرو کہ افق کے ساتھ اس کا میلان فہ مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے۔

(188) $$\text{مس}^2\,\text{فہ} = \left\{ \frac{(\text{ا}-\text{ب})^2}{\text{ف}^2} - 2\,\frac{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ج}-\text{ب})}{\text{ف}\,\text{ک}}\,\text{جم عہ} + \frac{(\text{ج}-\text{ب})^2}{\text{ک}^2} \right\} \text{قم}^2\,\text{عہ}$$

۴۷ــــ ایک ستون کا زاوئی ارتفاع عہ ہے جبکہ اس کو ایک مقام سے جو اس کے شمال میں ہے دیکھا جاتا ہے اور بہ ہے جبکہ اس کو ایک مقام سے جو اس کے مشرق میں اس سے ج فاصلہ پر ہے دیکھا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ ستون کی بلندی ہے

$$\frac{\text{ج جب عہ جب بہ}}{\left\{\text{جب}(\text{عہ}-\text{بہ})\,\text{جب}(\text{عہ}+\text{بہ})\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

۴۸ــــ ایک بندرگاہ سے شمال میں ۹ میل فاصلے پر ایک روشنی کا مینار ہے۔ بندرگاہ سے ایک کشتی اُس سمت میں جو مشرق سے شمال کی طرف $22\frac{1}{2}^\circ$ کا زاویہ بناتی ہے حرکت کرتی ہے یہاں تک کہ روشنی کا مینار اس سے شمال مغربی سمت میں نظر آتا ہے، پھر وہ مڑتی ہے اور روشنی کے مینار کی طرف حرکت کرتی ہے یہاں تک کہ بندرگاہ اس کے جنوب مغربی سمت میں نظر آتا ہے،

پھر وہ مڑتی ہے اور بندرگاہ میں اس کی طرف حرکت کرتی ہوئی داخل ہوتی ہے
ثابت کرو کہ کشتی کی اس گردش کا طول تقریباً ۱۶ میل ہے۔

۴۹ — ا نصف قطر کے ایک دائری تالاب کے گرد یکساں عرض ب کا راستہ ہے جس کے گرد بلندی د کی باڑ لگی ہوئی ہے۔ ایک شخص جس کی لمبائی ف ہے باڑ کے عین اندر کھڑا ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ باڑ کا وہ حصہ جس کے بلند ترین نقطے پانی میں انعکاس کے ذریعہ اِس شخص کو نظر آسکتے ہیں $\frac{1}{\text{ن}}$ واں ہے جہاں

$$\frac{1}{\text{ن}} = \frac{2}{\pi}\,\text{جم}^{-1}\left\{\frac{\text{ف}+\text{د}}{2\sqrt{\text{ف}\,\text{د}}} \times \frac{\sqrt{\text{ب}^2 + 2\,\text{ا}\,\text{ب}}}{\text{ا}+\text{ب}}\right\}$$

بشرطیکہ $\text{ف} > \text{د}\left(1 + \frac{2\text{ا}}{\text{ب}}\right)$، اور $> \frac{\text{د}}{1 + \frac{2\text{ا}}{\text{ب}}}$

۵۰ — ایک کروکی حلقے (Croquet-hoop) کا عرض، اس کے تاروں کی موٹائی، اور گولہ کا قطر دیے گئے ہیں؛ گولہ ایک دیے ہوئے محل میں ہے، بتاؤ کہ وہ شرطیں کس طرح معلوم کی جائیں کہ گولہ کے لیے یہ ممکن ہو جائے کہ وہ حلقہ میں سے جا سکے (۱) سیدھا، (۲) ایک تار کو ٹکرانے کے بعد (۳) دونوں تاروں کو ٹکرانے کے بعد؛ یہ مان لو کہ زاویہ وقوع زاویہ انعکاس کے مساوی ہے۔

۵۱ — تین پہاڑوں کی چوٹیاں ا، ب، ج ایک مشاہد کو ایک ہی خطِ مستقیم میں نظر آتی ہیں جبکہ وہ دو مقامات ف اور ق میں سے ہر ایک پر کھڑا رہتا ہے؛ یہ مقامات ایک ہی افقی مستوی میں ہیں، ا ب اور ب ج کے محاذی ہر مقام پر زاویہ عہ بنتا ہے اور زاویے ا ق ف، ج ف ق، علی الترتیب فہ اور یہ ہیں۔

ثابت کرو کہ پہاڑوں کی بلندیوں میں نسبت ہے:

$$\text{مم}\,2\text{عہ} + \text{مم}\,\text{یہ} : \tfrac{1}{2}(\text{مم}\,\text{عہ} + \text{مم}\,\text{یہ})(\text{مم}\,\text{عہ} + \text{مم}\,\text{فہ})\,\text{مس}\,\text{عہ} : \text{مم}\,2\text{عہ} + \text{مم}\,\text{فہ}$$

نیز ثابت کرو کہ اگر ق ب خط ا ج کو د پر قطع کرے تو ا ج = ج د جب ٢ ع (مم ب + مم ٢ ع)

٥٢ — ایک شخص ریل کی ایک سیدھی پٹڑی سے ج فاصلہ پر کھڑا ہوا ایک ٹرین دیکھتا ہے جو پٹڑی پر کھڑی ہے اور جس کا قریب ترین سرا پٹڑی کے اس نقطہ سے ر فاصلے پر ہے جو اس شخص کے قریب ترین ہے۔ وہ شخص ٹرین کے محاذی جو زاویہ بنتا ہے اس کا مشاہدہ کرتا ہے اور پھر ٹرین کا طول محسوب کرتا ہے۔ اگر زاویہ ع کے مشاہدہ کرنے میں اس سے ایک چھوٹی خطا ط سرزد ہو جائے تو ثابت کرو کہ اس کی وجہ سے محسوب کردہ طول میں جو خطا وقوع پذیر ہوگی اس کو اصلی طول کے ساتھ یہ نسبت ہے

$$\frac{\text{ج ط}}{\text{جب ع (ج جم ع − ر جب ع)}}$$

٥٣ — ایک پہاڑ کی بلندی ف حسب ذیل مشاہدہ کردہ چیزوں کی قیمتوں سے معلوم کرنی ہے، ایک افقی قاعدہ کا خط ب ج (ا)، زاویے ا ب ج، ا ج ب اور زاویہ (ی) جو ا ب، انتصابی خط کے ساتھ بناتا ہے۔ بتاؤ کہ

$$\text{ف} = \frac{\text{ا جم ی جب ج}}{\text{جب (ب + ج)}}$$

189) اگر ف تقریباً معلوم ہو تو ثابت کرو کہ ب ج کی مناسب ترین سمت

$$\text{ب} = ٢\ \text{مس}^{-١}\left(\frac{\text{ا جم ی − ف}}{\text{ا جم ی + ف}}\right)$$

سے ملتی ہے ایسی کہ ج کی پیمائش میں جو خطا ہو اس کا اثر ف کی مذکورہ بالا قیمت کی صحت پر کم سے کم ہوتا ہے۔

٥٤ — تین انتصابی جھنڈے ایک افقی مستوی پر قائم ہیں۔ اس مستوی میں تین نقطے ا، ب، ج ہیں جن میں سے ہر ایک پر ان تین جھنڈوں میں سے

دو کے سرے ایک ہی خط مستقیم میں نظر آتے ہیں؛ اور یہ خطوط مستقیم افق کے ساتھ علی الترتیب زاویے عہ، بہ، جہ بناتے ہیں۔ جھنڈوں کے سروں میں سے جو مستوی گذرتا ہے وہ افق کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ جھنڈوں کے طول ہیں

$$\frac{\text{ب ج}}{\sqrt{\text{مم}^2\,\text{بہ} - \text{مم}^2\,\text{طہ}} + \sqrt{\text{مم}^2\,\text{جہ} - \text{مم}^2\,\text{طہ}}}$$

اور دو متشابہ جملے۔ بتاؤ کہ جذروں کی علامتیں کس طرح لی جانی چاہییں۔

۵۵ — ایک برج اب ایک افقی مستوی پر قائم ہے اور اس پر ایک مینار ب ج ہے۔ ایک پہاڑ پر جس کا رخ ایک مائل مستوی خیال کیا جا سکتا ہے ایک مشاہد مقام ع پر کھڑا دیکھتا ہے کہ اب، ب ج میں سے ہر ایک کے محاذی اس کی آنکھ پر زاویہ عہ بنتا ہے؛ اب وہ مقام ف تک حرکت کرتا ہے اور فاصلہ ع ف (= ۲ا) کی پیمایش کرتا ہے اور دیکھتا ہے کہ پھر اب، ب ج اس کی آنکھ پر وہی زاویے عہ بناتے ہیں؛ اب وہ زاویوں اف ع (= بہ) اور ج ف ع (= جہ) کی پیمایش کرتا ہے۔ اگر اب، ب ج کی بلندیاں لا اور ما ہوں تو بتاؤ کہ

$$\text{لا جم بہ} = \text{ما جم جہ} = \text{ا}\left\{1 - \frac{\text{جم بہ جم جہ جم}^2\,\text{عہ}}{\text{جم}^2\,\tfrac{1}{2}(\text{بہ} + \text{جہ})\ \text{جم}^2\,\tfrac{1}{2}(\text{بہ} - \text{جہ})}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

نیز اگر ع ف کا نقطۂ وسطی ث ہو اور ث میں سے گذرنے والے خطِ میلانِ اعظم پر ھ وہ نقطہ ہو جس پر اب، ب ج مساوی زاویے ضہ بناتے ہیں اور اگر ث ھ = ب تو ثابت کرو کہ افق کے ساتھ پہاڑ کا میلان طہ، مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

$$\left\{\frac{\text{لا}^2\,\text{ما}^2}{(\text{لا} - \text{ما})^2} - \left(\frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}{2\,\text{ب}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \text{جب طہ} + \frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{2\,\text{ب}}\,\text{جم طہ}$$

$$= \frac{\text{لا ما}\,(\text{لا} + \text{ما})\ \text{جب}\ 2\,\text{ضہ}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - 2\,\text{لا ما جم}\ 2\,\text{ضہ}}$$

(190)

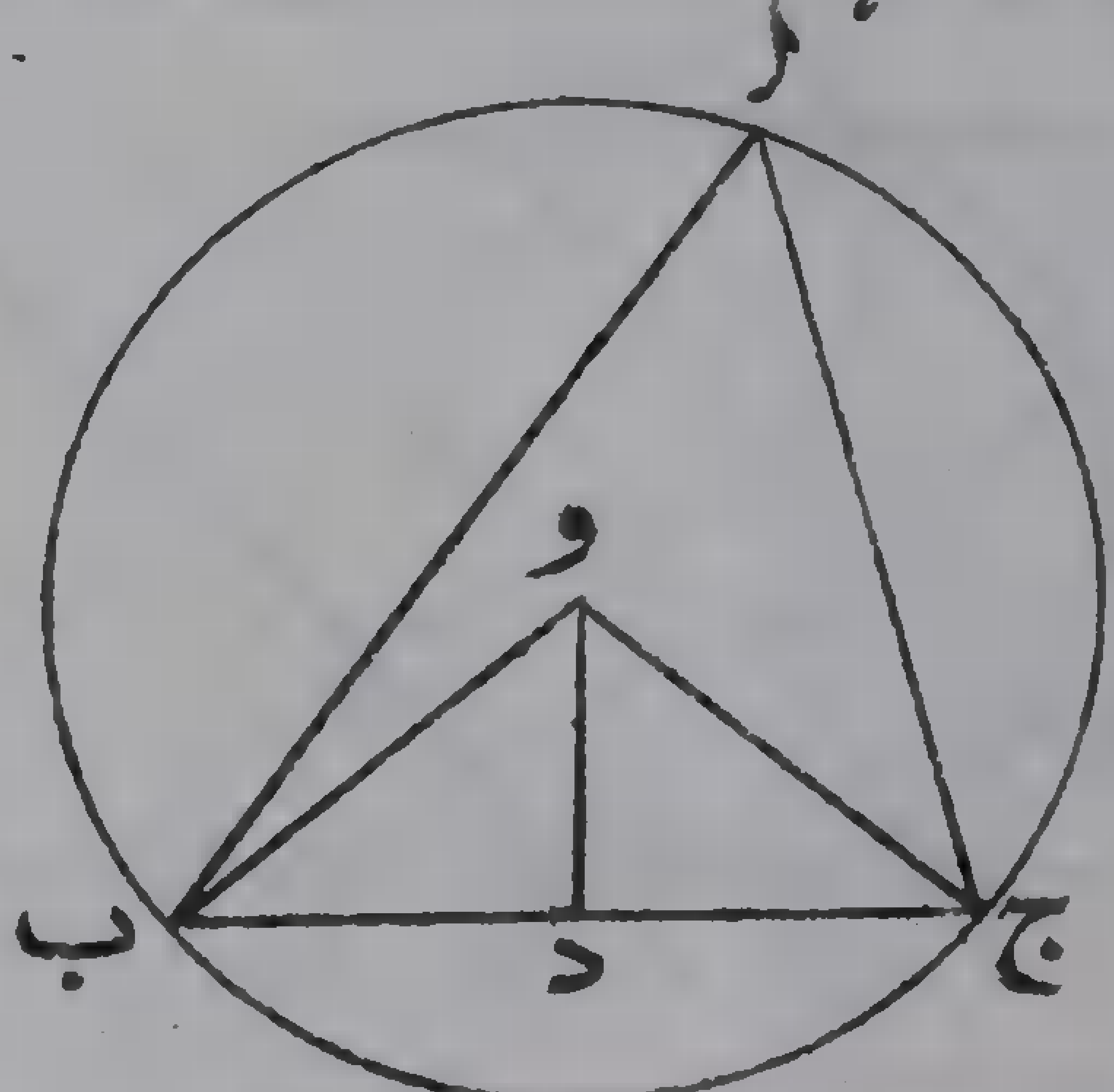
بارہواں باب

مثلثوں اور ذواربعۃ الاضلاعوں کے خواص

۱۵۰ ـــــــ اس باب میں ہم اکثر اقلیدسی ہندسہ کے اُن مسئلوں کو بلا ثبوت مان لینگے جو ہمارے مقصد کے لیے ضروری ہیں اور ان مسئلوں کی تحقیق کے لیے نظری ہندسہ پر لکھی ہوئی کتابوں کا حوالہ دینگے۔

مثلث کا حائط دائرہ

۱۵۱ ـــــــ ایک مثلث کے حائط دائرہ کے نصف قطر کے لیے ضابطہ $ر = \frac{1}{2}$ ا قم ا' دفعہ ۱۲۰ میں حاصل ہو چکا ہے۔ اس ضابطہ کو یوں بھی حاصل کیا جاسکتا ہے:



فرض کرو کہ د، حائط دائرہ کا مرکز ہے؛ مثلث ا ب ج کے ضلع (191)
ب ج پر عمود و د کھینچو، تو ب ج کا نقطۂ وسطی د ہے اور زاویہ ب و د = ا
چونکہ ب د = و ب جب ب و د، اس لیے

$\frac{1}{2}$ ا = ر جب ا ، یا ر = $\frac{1}{2}$ ا قم ا . . . . (۱)

اگر مثلث کا رقبہ س سے تعبیر ہو تو

س = $\frac{1}{2}$ ب ج جب ا

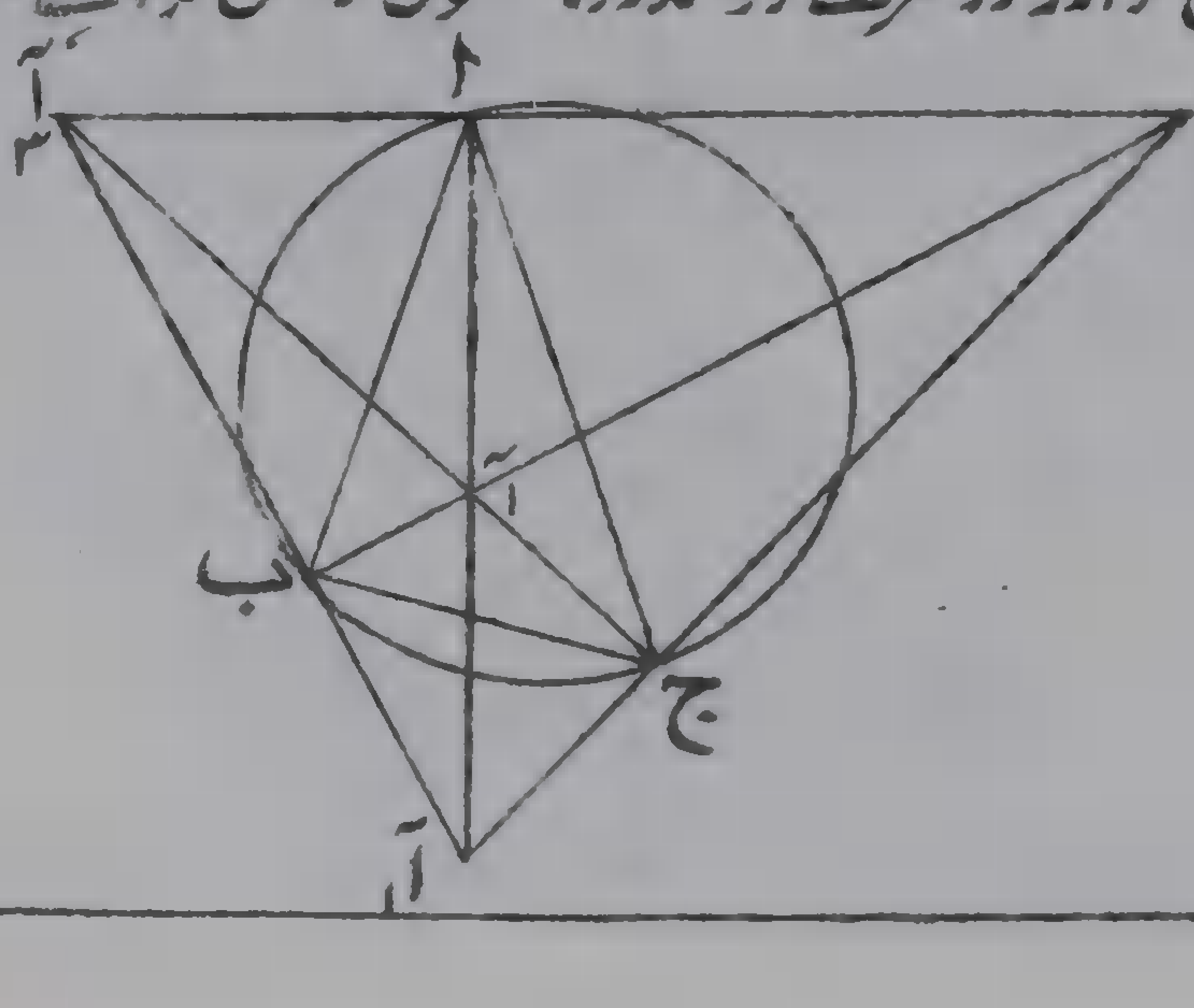
اس طرح حائط دائرہ کے نصف قطر کے لیے یہیں جملہ حاصل ہوتا ہے

ر = $\frac{\text{ا ب ج}}{\text{۴ س}}$ ، . . . . . . (۲)

نیز　　و د = و ب جم ا = ر جم ا

مثلث کے اندرونی اور جانبی دائرے

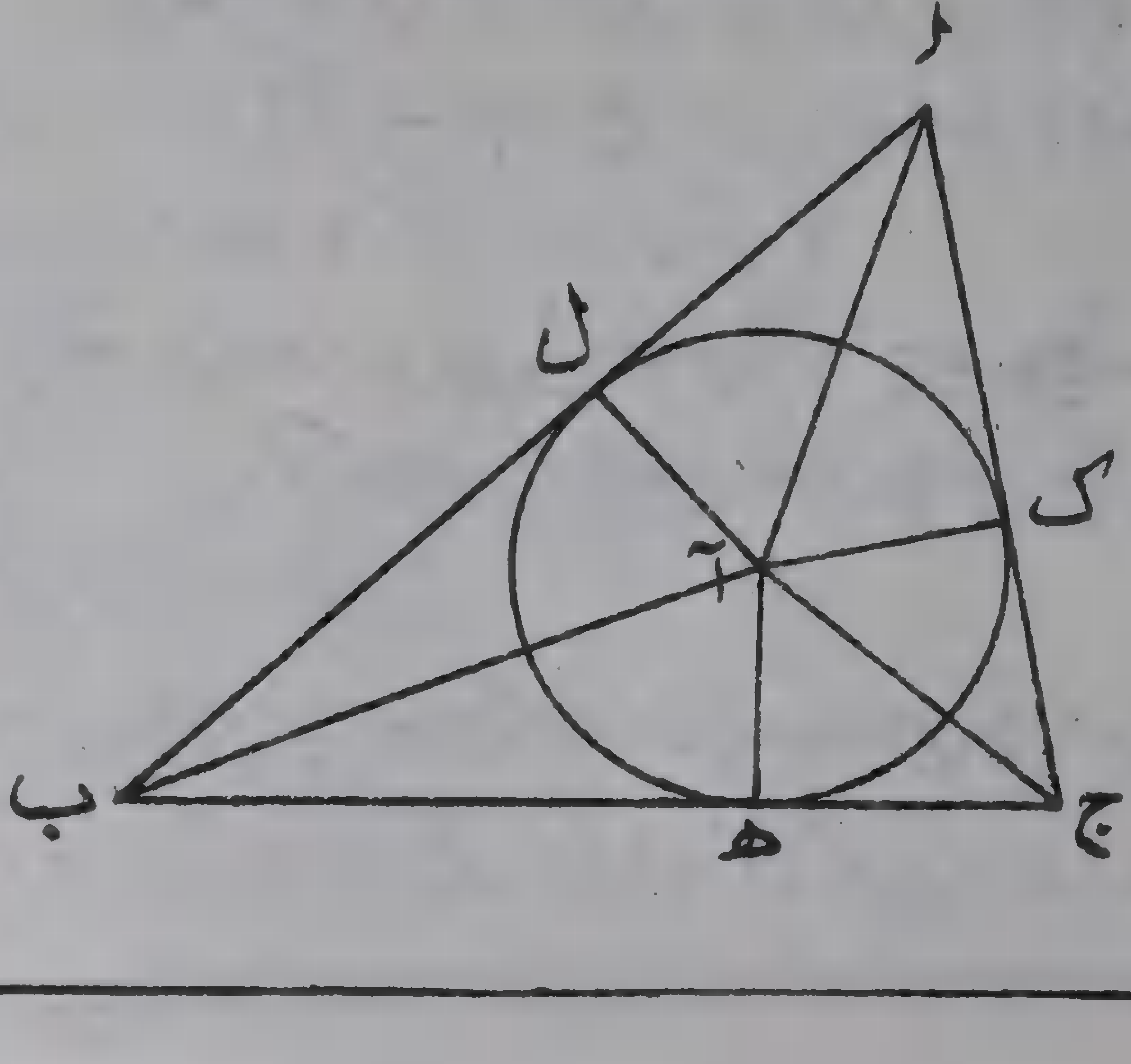
۱۵۲ ـــــــ ہم جانتے ہیں کہ ایک مثلث کے تین ضلعوں کو مس کرنے والے چار دائرے کھینچے جا سکتے ہیں؛ اندرونی دائرہ ہر ضلع کو داخلی طور پر مس کرتا ہے، فرض کرو کہ اس کا مرکز آ ہے؛ ہر جانبی دائرہ مثلث کے ایک ضلع کو اور دوسرے دو ممدودہ ضلعوں کو مس کرتا ہے، فرض کرو کہ



اِن جانبی دائروں کے مرکز آ$_1$، آ$_2$، آ$_3$ ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ آ ا، آ ب، آ ج، علی الترتیب زاویوں ا، ب، ج کی تنصیف کرتے ہیں، اور آ$_1$ ب، آ$_1$ ج علی الترتیب زاویوں ب، ج کی خارجی طور پر تنصیف کرتے ہیں۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مثلث آ$_1$ آ$_2$ آ$_3$ کے راسوں آ$_1$، آ$_2$، آ$_3$ سے مقابل کے ضلعوں پر عمود ا آ$_1$، ب آ$_2$، ج آ$_3$ ہیں اور اِس مثلث آ$_1$ آ$_2$ آ$_3$ کا مرکز عمودی آ ہے۔

مثلث ا ب ج کا حائط دائرہ، مثلث آ$_1$ آ$_2$ آ$_3$ کا نونقطی دائرہ ہے اور اس لیے یہ حائط دائرہ ضلعوں آ$_2$ آ$_3$، آ$_3$ آ$_1$، آ$_1$ آ$_2$ کے نقاط وسطی میں سے اور نیز آ آ$_1$، آ آ$_2$، آ آ$_3$ کے نقاط وسطی میں سے گذرتا ہے۔

(192) ۱۵۳ —— فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کے ضلعوں ا ب، ب ج، ج ا کو اس کا اندرونی دائرہ علی الترتیب نقطوں ل، ھ، ک پر مس کرتا ہے۔



تب Δ آب ج + Δ آج ا + Δ آ اب = س،

اب چونکہ Δ آب ج = $\frac{1}{2}$ آھ × ب ج = $\frac{1}{2}$ ر ا،

Δ آج ا = $\frac{1}{2}$ ر ب، اور Δ آ اب = $\frac{1}{2}$ ر ج،

جہاں ر، اندرونی دائرہ کا نصف قطر ہے، اس لیے

$\frac{1}{2}$ ر (ا + ب + ج) = س،

یعنی ر = س / س ، . . . . . . (۳)

جس سے اندرونی دائرہ کا نصف قطر حاصل ہوتا ہے۔ نیز چونکہ

ا = ب ھ + ھ ج = ر (مم $\frac{1}{2}$ ب + مم $\frac{1}{2}$ ج)

اس لیے ر = ا جب $\frac{1}{2}$ ب جب $\frac{1}{2}$ ج قط $\frac{1}{2}$ ا . . . . (۴)

یہ ر کے لیے دوسرا جملہ ہے جو (۳) سے بھی اخذ ہو سکتا ہے۔

ضابطوں (۱) اور (۴) کو ملانے سے ہمیں تشاکل جملہ حاصل ہوتا ہے

ر = ۴ ر جب $\frac{1}{2}$ ا جب $\frac{1}{2}$ ب جب $\frac{1}{2}$ ج . . . (۵)

نیز چونکہ اک + ب ج = $\frac{1}{2}$ (ب ج + ج ا + اب)

اس لیے اک = ال = س - ا

اور اسی طرح ب ھ = ب ل = س - ب، ج ھ = ج ک = س - ج

پس چونکہ ر = اک مس $\frac{1}{2}$ ا = ب ھ مس $\frac{1}{2}$ ب = ج ک مس $\frac{1}{2}$ ج

ہمیں جملے حاصل ہوتے ہیں

ر = (س - ا) مس $\frac{1}{2}$ ا = (س - ب) مس $\frac{1}{2}$ ب = (س - ج) مس $\frac{1}{2}$ ج . . (۶)

اِن کو (۳) اور (۴) سے بھی اخذ کیا جا سکتا ہے۔

(193) **۱۵۴** ——— دفعہ سابق کے جملوں کے جواب میں جانبی دائروں کے نصف قطروں ر_1، ر_2، ر_3 کے لیے جملے معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب کو وہ دائرہ جس کا مرکز آ_1 ہے نقطوں ھ_1، ک_1، ل_1 پر مس کرتا ہے۔ تب

$$\triangle\,\text{آ}_1\text{ا ب} + \triangle\,\text{آ}_1\text{ا ج} - \triangle\,\text{آ}_1\text{ب ج} = \text{س}،$$

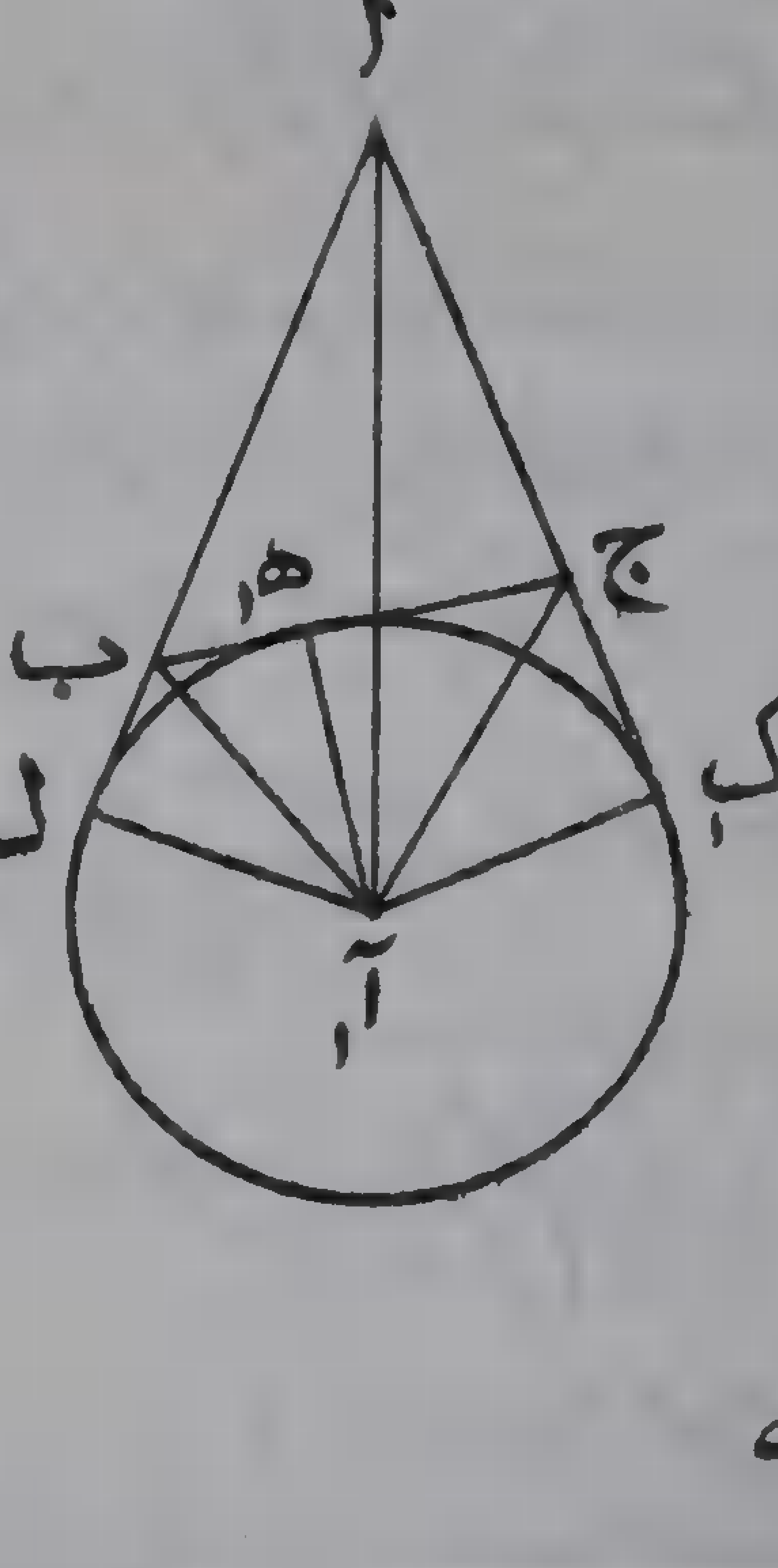
اس لیے $$\tfrac{1}{2}\,\text{ر}_1\,(\text{ب} + \text{ج} - \text{ا}) = \text{س}$$

اور اس لیے جانبی دائروں کے نصف قطروں کے لیے ہمیں ضابطے ملتے ہیں

$$\text{ر}_1 = \frac{\text{س}}{\text{س} - \text{ا}}،\quad \text{ر}_2 = \frac{\text{س}}{\text{س} - \text{ب}}،\quad \text{ر}_3 = \frac{\text{س}}{\text{س} - \text{ج}}،\quad \ldots\ldots (۷)$$

نیز چونکہ $$\text{ا} = \text{ب ھ}_1 + \text{ھ}_1\text{ ج} = \text{ر}_1\,(\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ب} + \text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ج})،$$

اس لیے $$\text{ر}_1 = \text{ا جم}\,\tfrac{1}{2}\text{ب جم}\,\tfrac{1}{2}\text{ج قط}\,\tfrac{1}{2}\text{ا} \quad \ldots\ldots (۸)$$



اِس سے ضابطہ ملتا ہے

$$ر_۱ = ۴ ر \text{ جب } \tfrac{۱}{۲} ا \text{ جم } \tfrac{۱}{۲} ب \text{ جم } \tfrac{۱}{۲} ج \quad \ldots\ldots (۹)$$

اسی طرح $ر_۲$ اور $ر_۳$ کے لیے متناظر جملے حاصل ہوتے ہیں ۔

پھر چونکہ

$$ب ھ_۱ = ب ل_۱ \text{، اور } ج ھ_۱ = ج ک_۱ \text{، اور } ا ک_۱ = ا ل_۱$$

اس لیے $ب ھ_۱ = س - ج$، $ج ھ_۱ = س - ب$، $ا ک_۱ = ا ل_۱ = س$
اس طرح ہمیں ضابطے ملتے ہیں

(194) $$ر_۱ = س \text{ مس } \tfrac{۱}{۲} ا = (س - ج) \text{ مم } \tfrac{۱}{۲} ب = (س - ب) \text{ مم } \tfrac{۱}{۲} ج \ldots (۱۰)$$

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ

$$ر_۱ + ر_۲ + ر_۳ - ر = ۴ ر \text{،}$$

$$ر_۲ ر_۳ + ر_۳ ر_۱ + ر_۱ ر_۲ = \frac{س^۲}{ر_۲} \text{،}$$

$$ر_۱^{-۱} + ر_۲^{-۱} + ر_۳^{-۱} = ر^{-۱}$$

(۲) ایک مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے لیے حسب ذیل جملے جو جانبی دائروں کے نصف قطروں کی رقوم میں ہیں ثابت کرو :—

$$(\text{الف}) \quad ا = \frac{ر_۱ (ر_۲ + ر_۳)}{\sqrt{ر_۲ ر_۱ + ر_۱ ر_۳ + ر_۳ ر_۲}} \text{،} \quad (\text{ب}) \text{ جب } \tfrac{۱}{۲} ا = \frac{ر_۱}{\sqrt{(ر_۱ + ر_۲)(ر_۱ + ر_۳)}}$$

$$(\text{ج}) \quad \text{جب } ا = ۲ ر_۱ \frac{\sqrt{ر_۲ ر_۱ + ر_۳ ر_۱ + ر_۲ ر_۳}}{(ر_۱ + ر_۲)(ر_۱ + ر_۳)}$$

(۳) ثابت کرو کہ $$ر = \frac{۱}{۴} \frac{(ر_۱ + ر_۲)(ر_۲ + ر_۳)(ر_۳ + ر_۱)}{ر_۲ ر_۳ + ر_۳ ر_۱ + ر_۱ ر_۲}$$

(۴) ثابت کرو کہ $۱۶ س^{۲} ر ر_{۱} ر_{۲} ر_{۳} = ا^{۲} ب^{۲} ج^{۲}$

(۵) ثابت کرو کہ $جم ا = \frac{۲ س + ر - ر_{۱}}{۲ س}$

(۶) اگر وہ جانبی دائرہ جو ضلع ا کو مس کرتا ہے حائط دائرہ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ

$$جم ا = جم ب + جم ج$$

(۷) ثابت کرو کہ $ر_{۱} (ر_{۲} + ر_{۳}) قم ا = ر_{۲} (ر_{۳} + ر_{۱}) قم ب = ر_{۳} (ر_{۱} + ر_{۲}) قم ج$

(۸) اگر اندرونی اور جانبی دائروں کے مرکزوں کے فاصلے راس ا سے ع، ع۱، ع۲، ع۳ ہوں اور ا سے ب ج پر عمود ع ہو تو ثابت کرو کہ

(ا) $ع ع_{۱} ع_{۲} ع_{۳} = ۴ س^{۲} ع^{۲}$ ،

(ب) $ع^{۲} + ع_{۱}^{۲} + ع_{۲}^{۲} + ع_{۳}^{۲} = ۱۶ س^{۲}$ ،

(ج) $\bar{ع}^{۲} + \bar{ع}_{۱}^{۲} + \bar{ع}_{۲}^{۲} + \bar{ع}_{۳}^{۲} = ۴ \bar{ع}^{۲}$

(۹) بتاؤ کہ اُس مثلث کا رقبہ جو جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے بنتا ہے یہ ہے

$$\frac{ا ب ج}{۲ ر} \text{ ، یا } ۸ س^{۲} جم \tfrac{۱}{۲} ا جم \tfrac{۱}{۲} ب جم \tfrac{۱}{۲} ج$$

(۱۰) ثابت کرو کہ اندرونی اور جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے جو چار مثلث بنتے ہیں اِن میں کسی کے گرد کھینچے ہوئے دائرہ کا نصف قطر، س کا دُگنا ہوتا ہے۔

(۱۱) ثابت کرو کہ رقبے $\overline{آ_{۱}} \overline{آ_{۲}} \overline{آ_{۳}}$ ، $\overline{آ} \overline{آ_{۲}} \overline{آ_{۳}}$ ، $\overline{آ} \overline{آ_{۳}} \overline{آ_{۱}}$ ، $\overline{آ} \overline{آ_{۱}} \overline{آ_{۲}}$ ایسے بدلتے ہیں جیسے $\frac{۱}{ر}$ ، $\frac{۱}{ر_{۱}}$ ، $\frac{۱}{ر_{۲}}$ ، $\frac{۱}{ر_{۳}}$

(۱۲) ثابت کرو کہ (ا) $\frac{\overline{آ_{۲} آ_{۳}}^{۲}}{ر_{۲} ر_{۳}} + \frac{\overline{آ_{۳} آ_{۱}}^{۲}}{ر_{۳} ر_{۱}} + \frac{\overline{آ_{۱} آ_{۲}}^{۲}}{ر_{۱} ر_{۲}} = ۸ \frac{س}{ر}$ ،

(ب) $ر^{۲} \times \overline{آ آ_{۱}} \times \overline{آ آ_{۲}} \times \overline{آ آ_{۳}} = \overline{آ ا}^{۲} \times \overline{آ ب}^{۲} \times \overline{آ ج}^{۲}$ ،

(۱۳) اگر ایک مثلث کے راسوں سے آ کے فاصلے ف_1، ف_2، ف_3 ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ف}_1 \text{ف}_2 \text{ف}_3}{\text{ا ب ج}} = \frac{1}{\text{س}}$$

(۱۴) اگر اُس مثلث کے ضلع اَ، بَ، جَ ہوں جو جانبی دائروں کے نقاط تماس ھ_1، ھ_2، ھ_3 کو ملانے سے بنتا ہے تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{ا}^2 - \text{اَ}^2}{\text{ا}} = \frac{\text{ب}^2 - \text{بَ}^2}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}^2 - \text{جَ}^2}{\text{ج}}$

(۱۵) دائروں ب وج، ج وا، ا وب کے مرکزوں کو ملانے سے جو مثلث بنتا ہے اس کے ضلعوں میں نسبت جب ۲ ا : جب ۲ ب : جب ۲ ج ہو گی۔ (195)

(۱۶) ثابت کرو کہ مبہم صورت میں جبکہ ا، ب، ب دیے جائیں جو دو مثلث حاصل ہوتے ہیں اُن کے حائط دائرے مساوی ہوتے ہیں؛ نیز ثابت کرو کہ ان کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ ہے

$$(\text{ب}^2 \, \text{قم}^2 \, \text{ب} - \text{ا}^2)^{\frac{1}{2}}$$

(۱۷) مثلث کے حل کی مبہم صورت میں ثابت کرو کہ دیے ہوئے ضلعوں میں سے بڑے ضلع کے ساتھ اندرونی دائروں کے نقاط تماس کا فاصلہ تیسرے ضلع کی قیمتوں کے فرق کے نصف کے مساوی ہوتا ہے۔

(۱۸) اگر مثلثوں آ ب ج، آ ج ا، آ ا ب کے حائط دائروں کے نصف قطر غ_1، غ_2، غ_3 ہوں تو ثابت کرو کہ $۴ \text{ر}^3 - \text{ر} (\text{غ}_1^2 + \text{غ}_2^2 + \text{غ}_3^2) - \text{غ}_1 \text{غ}_2 \text{غ}_3 = ۰$

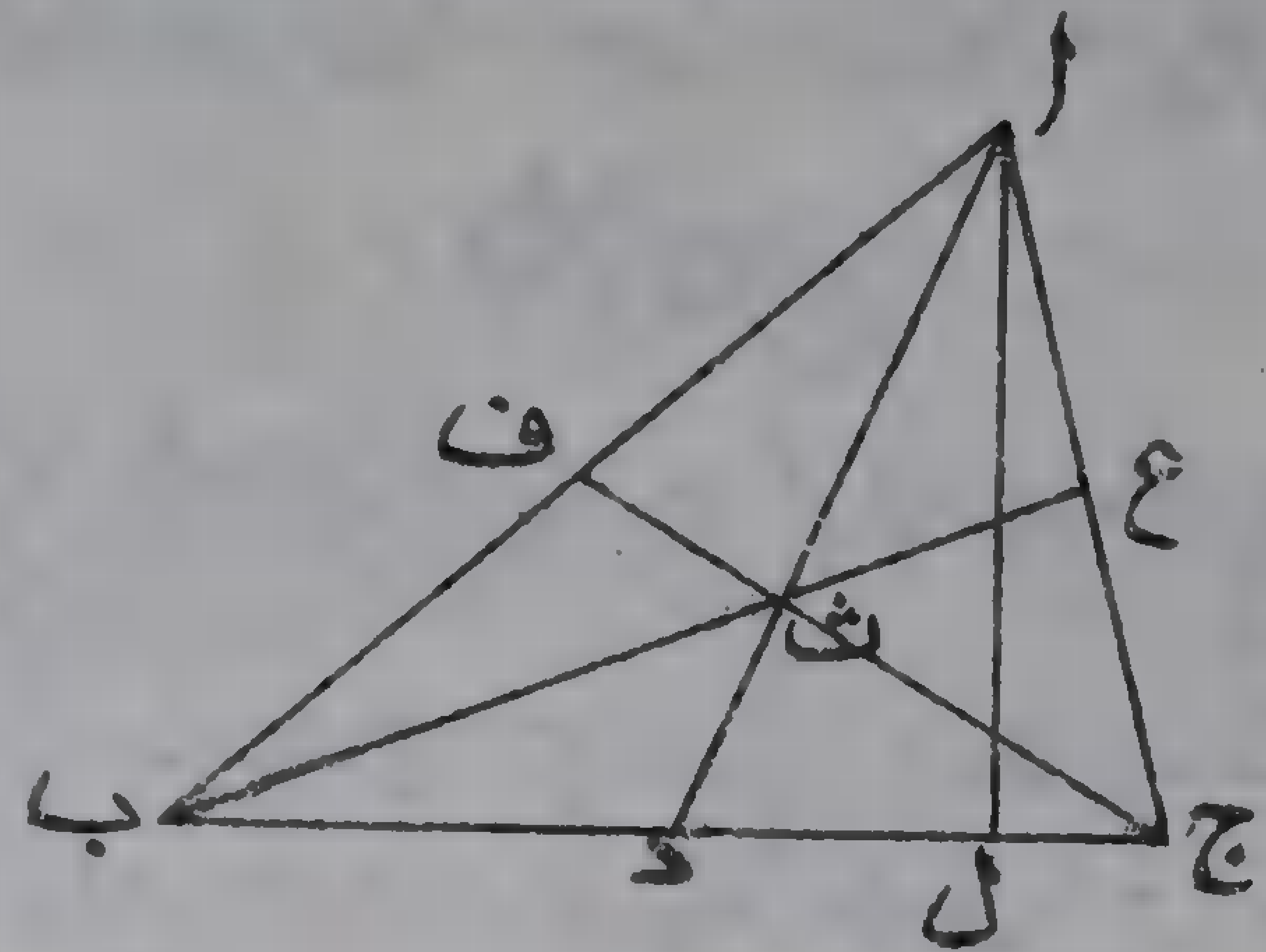
(۱۹) ثابت کرو کہ ایک مثلث کے جانبی دائروں کے نصف قطر، کعبی مساوات

$$\text{لا}^3 - \text{لا}^2 (۴ \text{ر} + \text{ر}) + \text{لا} \, \text{س}^2 - \text{ر} \, \text{س}^2 = ۰$$

کی اصلیں ہیں۔

خطوط وسطی

۱۵۵ —— ایک مثلث کے راسوں کو مقابل کے ضلعوں کے نقاط وسطی سے ملانے والے خطوط مستقیم ا د، ب ع، ج ف خطوط وسطی کہلاتے ہیں۔



خط وسطی ا د کا طول، مشہور مسئلہ $اب^2 + اج^2 = 2(اد^2 + بد^2)$ سے حاصل ہوتا ہے، اِس طرح خطوط وسطی کے طولوں کے مربع مساواتوں

$$م_1^2 = \frac{1}{2}ب^2 + \frac{1}{2}ج^2 - \frac{1}{4}ا^2،\quad م_2^2 = \frac{1}{2}ج^2 + \frac{1}{2}ا^2 - \frac{1}{4}ب^2،$$

$$م_3^2 = \frac{1}{2}ا^2 + \frac{1}{2}ب^2 - \frac{1}{4}ج^2 \quad \ldots (11)$$

سے ملتے ہیں جہاں $م_1$، $م_2$، $م_3$ خطوط وسطی کے طول ہیں۔ فرض کرو کہ زاویہ ا د ج، $ہ_1$ سے تعبیر ہوتا ہے، تب

$$مم\, ہ_1 = \frac{دل}{ال} = \frac{1}{2}\,\frac{بل - جل}{ال}$$

جہاں ال، ب ج پر عمود ہے؛ پس م، مساوات

$$\text{مم } م_1 = \frac{1}{2} (\text{مم ب} - \text{مم ج}) \quad \ldots\ldots (12)$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

(196) نقطہ ث جس پر خطوط وسطی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں مثلث کا مرکز ہندسی کہلاتا ہے۔ یہ بہت مشہور ہے کہ خطوط وسطی میں سے ہر ایک کو ث، نسبت ۲:۱ میں تقسیم کرتا ہے۔

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ مم ا ث ف + مم ب ث د + مم ج ث ع = مم ا + مم ب + مم ج

(۲) اگر دائروں ب ث ج، ج ث ا، ا ث ب کے مرکز ع، ب، ج ہوں اور مثلثوں ا ب ج، ع ب ج کے رقبے ق، قَ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$48\ \text{ق قَ} = (\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2)^2$$

(۳) اگر دائروں ب ث ج، ج ث ا، ا ث ب کے نصف قطر $ر_1$، $ر_2$، $ر_3$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ا}^2(\text{ب}^2-\text{ج}^2)}{ر_1^2} + \frac{\text{ب}^2(\text{ج}^2-\text{ا}^2)}{ر_2^2} + \frac{\text{ج}^2(\text{ا}^2-\text{ب}^2)}{ر_3^2} = 0$$

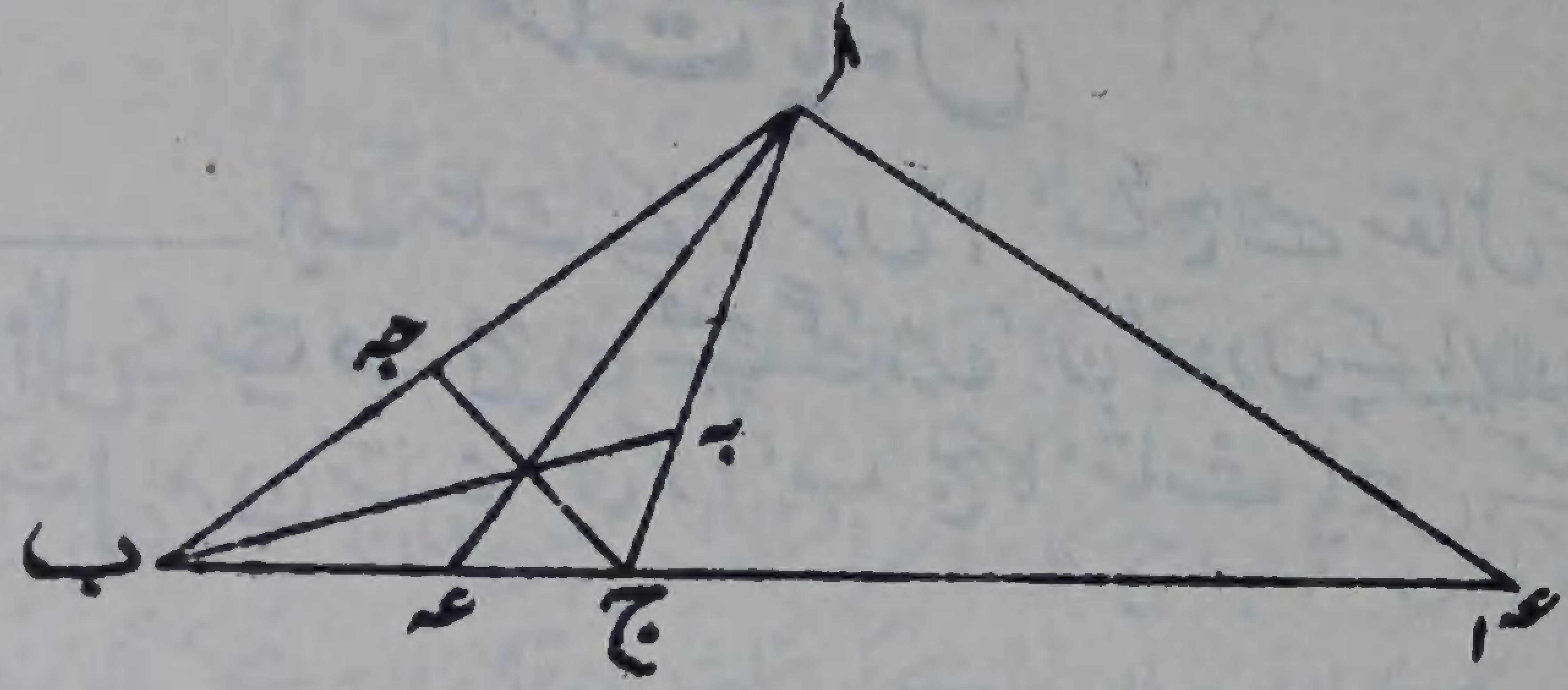
(۴) اگر زاوئے ب ا د، ج ب ع، ا ج ف علی الترتیب ع، ب، ج اور زاوئے ج ا د، ا ب ع، ب ج ف علی الترتیب عَ، بَ، جَ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{مم ع} + \text{مم ب} + \text{مم ج} = \text{مم عَ} + \text{مم بَ} + \text{مم جَ}$$

زاویوں کے ناصف

۱۵۶ ـــــ فرض کرو کہ زاویہ ا کے داخلی اور خارجی ناصف مقابل کے ضلع سے نقطوں عہ اور عہ_1 پر ملتے ہیں۔ فرض کرو کہ داخلی ناصفوں اعہ، ب بہ، ج جہ کے طول ف، گ، ھ ہیں اور خارجی ناصفوں اعہ_1، ب بہ_1، ج جہ_1 کے طول فَ، گَ، ھَ۔ تب عہ اور عہ_1 کے محل معلوم کرنے کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{\text{ب عہ}}{\text{ج عہ}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ج ا}} = \frac{\text{ب عہ}_1}{\text{ج عہ}_1}$ اس لیے

$$\text{ب عہ} = \frac{\text{اج}}{\text{ب+ج}}،\ \text{ج عہ} = \frac{\text{اب}}{\text{ب+ج}}،\ \text{ب عہ}_1 = \frac{\text{اج}}{\text{ج-ب}}،\ \text{ج عہ}_1 = \frac{\text{اب}}{\text{ج-ب}}$$



اور طول ف، فَ معلوم کرنے کے لیے

$$\triangle\ \text{اب عہ} + \triangle\ \text{اج عہ} = \text{س} = \triangle\ \text{اعہ}_1\text{ب} - \triangle\ \text{اعہ}_1\text{ج}،$$

اس لیے $\text{ف (ب+ج) جیب } \tfrac{1}{2}\text{ا} = \text{فَ (ج-ب) جم } \tfrac{1}{2}\text{ا} = \text{۲ س}$

پس $\text{ف} = \frac{\text{۲ب ج}}{\text{ب+ج}} \text{ جم } \tfrac{1}{2}\text{ا}،\ \text{فَ} = \frac{\text{۲ب ج}}{\text{ج-ب}} \text{ جیب } \tfrac{1}{2}\text{ا}$ ...(۱۳) (197)

مثالیں

(۱) اگر عہ، بہ، جہ وہ زاویے ہوں جو ا عہ، ب بہ، ج جہ، ضلعوں ا، ب، ج کے ساتھ بناتے ہیں تو ثابت کرو کہ ا جب ۲ عہ + ب جب ۲ بہ + ج جب ۲ جہ = ۰

(۲) اگر زاویوں کے ناصفوں کو حائط دائرہ تک خارج کیا جائے اور ان کے طول ف۱، گ۱، ھ۱ ہوں تو ثابت کرو کہ

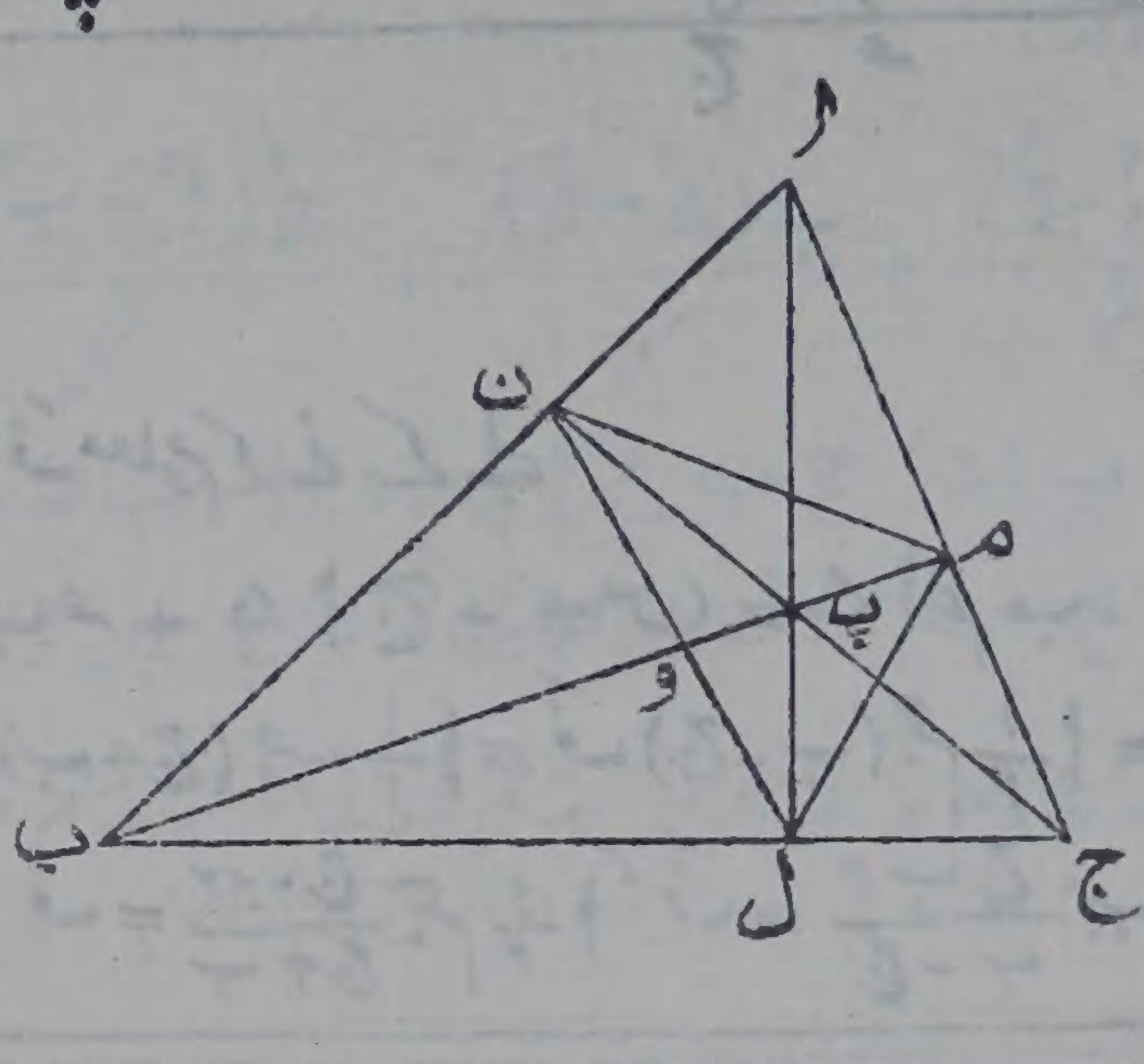
ف۱^-۱ جم ۱/۲ ا + گ۱^-۱ جم ۱/۲ ب + ھ۱^-۱ جم ۱/۲ ج = ا^-۱ + ب^-۱ + ج^-۱

اور ف۱ جم ۱/۲ ا + گ۱ جم ۱/۲ ب + ھ۱ جم ۱/۲ ج = ا + ب + ج

(۳) ثابت کرو کہ عہ بہ، ج جہ کو نسبت ۲ ج : ا + ب میں قطع کرتا ہے۔

مثلث پائیں

۱۵۷ ــــــ ایک مثلث کے راسوں ا، ب، ج سے مقابل کے ضلعوں پر عمود ال، ب م، ج ن کھینچے گئے ہیں، ان عمودوں کے پایوں کو ملانے سے جو مثلث ل م ن بنتا ہے اس کو ا، ب، ج کا مثلث پائیں کہتے ہیں۔



فرض کرو کہ مثلث اب ج کا مرکز عمودی پ ہے، تب چونکہ پ م ا
پ ن ا قائمہ زاویے ہیں اس لیے ایک دائرہ جس کا قطر پ ا ہو شکل
پ م ا ن کے گرد کھینچا جا سکتا ہے، اس لیے
م ن = پ ا × اُس زاویہ کی جیب جو قطاع م ن میں بنتا ہے
یعنے م ن = پ ا جب ا
اب اگر محائط دائرہ کا مرکز و ہو اور و د، ب ج پر عمود ہو تو یہ ظاہر
ہے کہ ا پ = ۲ و د، اور ہم نے دفعہ ۱۵۱ میں یہ بتا دیا ہے کہ
و د = ر جم ا، اس لیے
م ن = ۲ ر جب ا جم ا = ل جم ا
(198) نیز زاویوں پ ل م، پ ل ن میں سے ہر ایک، ا کا متمم ہے، یا م ل ن
= π − ۲ ا، پس مثلث پائیں کے ضلع اور زاویے علی الترتیب میں

$$\left.\begin{array}{l} ل جم ا،\ ب جم ب،\ ج جم ج \\ \pi - ۲ ا،\ \pi - ۲ ب،\ \pi - ۲ ج \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (۱۴)$$

یہ توجہ طلب ہے کہ آ، آ۲، آ۳ کا مثلث پائیں اب ج ہے۔ ل م ن کا
مثلث پائیں، اب ج کا دوسرا مثلث پائیں کہلاتا ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔
ہم نے اوپر یہ مان لیا ہے کہ مثلث حادۃ الزاویہ ہے، اگر زاویہ ا منفرجہ
ہو تو یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ مثلث پائیں کے زاویے ۲ ا − π، ۲ ب،
۲ ج ہیں اور اس کے ضلع − ل جم ا، ب جم ب، ج جم ج ہیں۔

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ مثلث ل م ن کے اندرونی دائرہ کا نصف قطر
۲ ر جم ا جم ب جم ج ہے۔

(۲) اگر دائروں م پ ن، ن پ ل، ل پ م کے قطرے ہ، ج، ع ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ہ ج}}{\text{ب ج}} + \frac{\text{ج ع}}{\text{ج ا}} + \frac{\text{ع ہ}}{\text{ا ب}} = ۱$$

(۳) اگر مثلث پایئں کے اندرونی اور جانبی دائروں کے نصف قطر ر، ر۱، ر۲، ر۳ ہوں تو

ثابت کرو کہ $$\frac{\text{ر}_۱ \text{ر}_۲ \text{ر}_۳}{\text{ر}} = \frac{\text{ر ر}_۱ \text{ر}_۲ \text{ر}_۳}{\text{ر}^۲}$$

(۴) اگر ا ل، ب م، ج ن، حائط دائرہ سے نقطوں لَ، مَ، نَ پر ملیں تو

ثابت کرو کہ $$\frac{\text{ا لَ}}{\text{ا ل}} + \frac{\text{ب مَ}}{\text{ب م}} + \frac{\text{ج نَ}}{\text{ج ن}} = ۴$$

خاص نقطوں کے درمیان فاصلے

۱۵۸ ——— فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کا مرکز عمودی پ، حائط دائرہ کا مرکز و، اندرونی دائرہ کا مرکز آ، ایک جانبی دائرہ کا مرکز آ۱، مرکز ہندسی ث، اور نو نقطی دائرہ کا مرکز ع ہے۔ آئیلر کے مشہور مسئلے کی بموجب تین نقطے و، ث، پ ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں اور پ ث = ۲ و ث؛ نقطہ ع بھی و پ پر واقع ہے اور اس کا وسطی نقطہ ہے۔ زاویوں آ ا و، آ ا پ میں سے ہر ایک، $\frac{۱}{۲}$(ب ~ ج) کے مساوی ہے؛ نیز ا و = ر، ا پ = ۲ ر جم ا،

ا آ = رقم $\frac{۱}{۲}$ ا = ۴ ر جب $\frac{۱}{۲}$ ب جب $\frac{۱}{۲}$ ج،

ا آ۱ = ۴ ر جم $\frac{۱}{۲}$ ب × جم $\frac{۱}{۲}$ ج

اب ہم نقطوں و، آ، پ، آ۱، ع کے درمیان ایک دوسرے